УДК 531:517.2

М.Р. Петриченко

ЭКСТРЕМАЛИ, ХАРАКТЕРИСТИКИ, СВОБОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И «ПРИНЦИП МИНИМУМА ДИССИПАЦИИ» ДЛЯ БЕЗНАПОРНЫХ ПОТОКОВ

Обычно вариационные принципы в механике возникают как достаточные условия, разделяющие действительные и виртуальные (допустимые, совместимые со связями) движения. Необходимые условия экстремума трактуются как уравнения движения. Можно обратить задачу. Пусть известны феноменологические уравнения движения. Спрашивается: возможно ли трактовать эти уравнения как необходимые условия экстремума для некоторого действия (функционала) и, если возможно, то как устроен функционал? Общее решение этой задачи содержится в так называемом методе удвоения переменных Ю.Г. Павленко.

Существует известная задача о построении кривой свободной поверхности потока как однопараметрической группы диффеоморфизмов $g^x : h' \to h,\ \ x > 0,\ \ g^0 h = h'$ глубин потока $h = h(x)$ вдоль директории (продольной координаты x). В этой задаче функционал строить не надо, т. к. исходное уравнение равносильно канонической (гамильтоновой) системе, обладающей интегралом энергии. Этот интеграл совпадает с интегралом Бернулли для потока в целом — ситуация редкая для диссипативной системы. Вопрос о действии решается однозначно: плотность лагранжиана совпадает с двойственной по отношению к интегралу энергии функцией. Обнаруживается по ходу доказательства, что характеристика дифференциального уравнения Лагранжа — свободная поверхность.

1. Пусть выполняется «уравнение неравномерного движения»

$$\frac{dh}{dx} = N\left(i - i_f\right), \tag{1}$$

где $h = h(x)$ — глубина потока как функция координаты x, отсчитываемой вдоль потока; N: $= dh/d$Э; Э — удельная энергия сечения; $i,\ i_f$ — соответственно уклоны дна и трения; $i_f := dh_f/dx > 0$, знак i произволен.

Справедлива такая **лемма 1**: уравнение (1) находится среди необходимых условий минимума для следующих положительных функционалов:

$$1)\ \ S(h) = \int_0^L \left(\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + N^2 \left(i - i_f \right)^2 \right) dx;$$

$$2)\ \ \Xi(\mathrm{h}) = \int_0^L \left(\frac{dh}{dx} - N\left(i - i_f \right) \right)^2 dx.$$

Здесь $L > 0$ — длина потока. Для того чтобы $\delta S = 0$, $\delta\Xi = 0$ (δ — изометрическая вариация, не изменяющая L), необходимо, чтобы решения (1) находились в пучке экстремалей функционалов $S(h)$ и $\Xi(h)$.

Более общий результат содержит **лемма 2**: уравнение (1) равносильно канонической системе с гамильтонианом $E(x, h) = H_e + h_f$, где H_e — полный напор. Действительно, достаточно записать уравнение (1) в виде следующей системы с параметром t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{N} = \frac{\partial E}{\partial h};$$
$$\frac{dh}{dt} = i - i_f = -\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{2}$$

чтобы убедиться в необходимости существования интеграла энергии $E = \mathrm{const}$. Достаточность существования интеграла энергии очевидна. Уравнение (1) и, как следствие, система (2) получаются из интеграла энергии $E = \mathrm{const}$.

Лемма 2 допускает простое обобщение. Пусть используются обозначения Монжа:

$$p := \frac{\partial h_f}{\partial x};\ q := \frac{\partial h_f}{\partial h};\ r := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x^2};\ s := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x \partial h};\ t = \frac{\partial^2 h_f}{\partial h^2}.$$

Тогда

$$i_f = \frac{p + iNq}{1 + qN};$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-p}{q+\frac{1}{N}}$$

и существует гамильтониан $G(x, h)$ такой, что

$$\frac{\partial G}{\partial x}=p-i;$$

$$\frac{\partial G}{\partial h}=q+\frac{1}{N}.$$

Значит, гамильтонианы $E(x, h)$, $G(x, h)$ связаны следующими тождествами в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial h}(G-E)=q;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(G-E)=p-i_f. \qquad (3)$$

Эти тождества можно рассматривать как систему уравнений для определения функции $K(x, h)$: = $= G(x, h) - E(x, h)$. Тогда:

1) из первого равенства получается $K = h_f + f(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция своей переменной. Из второго равенства $p - i_f = p + f'(x)$, откуда $f = - h_f +$ const. Значит, $K = E - G =$ = const, и оба гамильтониана — $E(x, h)$ и $G(x, h)$ —эквивалентны;

2) из тождеств (3) дифференцированием по x первой строчки и по h второй строчки получаются равенства

$$s_G-s_E=s;$$

$$s_G-s_E=s-\frac{\partial i_f}{\partial h}. \qquad (3a)$$

Значит, $\frac{\partial i_f}{\partial h}=0,\ \ \frac{\partial i_f}{\partial x}=\frac{di_f}{dx};$

3) из тождеств (3) дифференцированием по h первой строчки и по x второй строчки и с учетом п. 2 получается равенство

$$r+t=\frac{di_f}{dx}. \qquad (4)$$

Можно рассматривать (4) как дифференциальное уравнение для определения h_f. Это уравнение в силу тождеств (1), (2) можно записать так:

$$Nq(1+Nq)r+(1+Nq)^2=N(i-p)s. \qquad (4a)$$

Уравнение (4) приводится в [1, 2]. Там же получены первые и полные интегралы этого уравнения и каустики. Начиная с этого места $N = 1$, т. е. Э $= h$ (фильтрационные потоки).

Тогда (4*а*) записывается так:

$$q(1+q)r+(1+q)^2t=(i-p)s. \qquad (4б)$$

Уравнение (4*б*) изучено в [3]. В известной монографии И.Я. Бакельмана [4] используются методы вариационного исчисления для решения нелинейных уравнений типа (4)—(4*б*). Для дальнейшего целесообразно применять более простой интуитивный подход, не претендующий на строгость.

2. Справедлива такая **квазитеорема 1**: пусть

$$S(h)=\int\limits_{X\times H} i_f\,dx\,dh=\int\limits_{X\times H} dh_f\,dh$$

есть функционал, изображающий полное изменение уклона трения на допустимом множестве X координат и глубин H при фиксированном расходе и форме русла. Тогда $S(h)$ достигает экстремума на действительной траектории потока. При этом характеристика уравнения Лагранжа для $S(h)$ совпадает с кривой свободной поверхности. Иначе: для реализации минимума $S(h)$ необходимо, чтобы свободная поверхность совпадала с характеристикой уравнения Лагранжа для $S(h)$ и чтобы расслоение потока погружалось в пучок экстремалей $S(h)$. Доказательство первого утверждения очевидно.

*В силу (1) плотность лагранжиана для действия $S(h)$ равна

$$\sigma(p,q):=\frac{dS}{d\Omega}=\frac{i-p}{1+q},$$

где $d\Omega = dx\,dh$ — элемент фазового объема. Уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial q}\right)=0$$

в данном случае имеет вид

$$s+\frac{i-p}{1+q}t=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) — параболического типа с характеристикой

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-p}{1+q},$$

что и требовалось доказать.

* «Звездочки» (*) отделяют доказательство от основного текста.

Вдоль характеристики $\frac{dq}{dh} = 0$. Тогда $q = f(x)$, $h_f = hf(x) + g(x)$. Пусть $f(x) = -1$, $g(x) = ix + h'$. Тогда вдоль характеристики выполняется интеграл Бернулли. Расслоение потока характеристиками, совпадающими со свободными поверхностями, необходимо для выполнения условия $S \to$ extr (min ≥ 0, max ≤ 0)*.

Получается, что действительное безнапорное движение реализует минимум потерь напора и что расслоение потока $(h' \in H) \overset{(x \in X)}{\to} (h \in H)$, т. е. его свободная поверхность, погружается в пучок экстремалей действия. Этот результат можно конкретизировать, выделив класс «наилучших» движений.

Квазитеорема 2: для минимума действия

$$\Xi(h) := \int\limits_{X \times H} (i - i_f)^2 \, dxdh = \|i - i_f\|^2$$

необходимо, чтобы свободная поверхность потока совпадала с экстремалью.

Действительно, уравнение Лагранжа для $\Xi(h)$ имеет вид

$$(1+q)^2 r - 4s(p-i)(1+q) + 3(p-i)^2 t = 0 . \quad (5a)$$

Уравнение (5*а*) гиперболического типа с характеристиками, удовлетворяющими уравнению

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 - 4j\left(\frac{dh}{dx}\right) + 3j^2 = 0,$$

где $j = \frac{i-p}{1+q}$ — уклон свободной поверхности. Следовательно, одна из характеристик уравнения Лагранжа (5*а*), $dh/dx = j$, совпадает со свободной поверхностью. Вдоль этой характеристики уравнение (5*а*) принимает вид

$$dp + 3\frac{i-p}{1+q}dq = 0 . \quad (5б)$$

В (5*б*) переменные разделяются, и тогда

$$p = i - C_1(1+q)^3$$

есть первый интеграл (5*а*) и (5*б*), C_1 — постоянная. Этот промежуточный интеграл суть уравнение Клеро. Тогда полный интеграл (5*а*) и (5*б*) равен

$$h_f = ix - C_1(1+q)^3 + q(h - h') . \quad (6)$$

Особое решение, выделяемое из полного интеграла (6), (каустика) имеет вид

$$h - ix + h_f = h' \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{(h-h')^3}{C_1 x}} . \quad (7)$$

Второе слагаемое в правой части (7) при $x \to \infty$ мало и изображает коррекцию потерь напора, обусловленную неравномерностью движения. Иначе: потери напора при квазиравномерном движении отличны от потерь напора при равномерном движении и величина отличия имеет порядок

$$O\left(\sqrt{\frac{\left|h-h'\right|^3}{x}}\right) = O\left(\left|h-h'\right|\sqrt{|j|}\right) .$$

Поэтому интеграл (7) можно записать так (берется верхний знак и исключается C_1):

$$h_f = (h_f)_{\text{В}} + (h-h')\sqrt{|j|}, (h_f)_{\text{В}} := h' - h + ix . \quad (7a)$$

Интеграл (7а) учитывает релаксацию потерь напора, связанную с неравномерностью движения: он преувеличивает действительные потери напора по сравнению с потерями напора по интегралу Бернулли в движениях с j > 0 и преуменьшает потери напора в движениях с кривой спада (j < 0).

Итак:

свободная поверхность безнапорного потока совпадает с характеристикой уравнения Лагранжа для минимума (экстремума) потерь напора. Следовательно, расслоение потока характеристиками погружается в пучок экстремалей, вдоль которых потери напора (и — при постоянном расходе — диссипация) минимальны;

действительные квазиравномерные движения минимально отклоняются от движений равномерных: всегда для потока $\|i - i_f\|_{L_2} \to \inf \geq 0$.

Следовательно, равномерное движение доставляет абсолютный (актуальный) минимум диссипации: $\int\limits_\Omega i_f d\Omega \underset{j \to \pm 0}{\to} \inf ess$.

Хотя все вычисления ограничены значением $N = 1$, сказанное остается справедливым и для $\forall N \in (-\infty, +\infty)$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бухарцев, В.Н.** Экстремальные свойства безнапорных потоков [Текст] / В.Н. Бухарцев, М.Р. Петриченко // Сб.: Механика и процессы управления.— УНЦ.— Екатеринбург, 2006.— С. 79–84.

2. **Бухарцев, В.Н.** Канонические уравнения и необходимые условия минимума диссипации для безнапорных потоков [Текст] / В.Н. Бухарцев, М.Р. Петриченко // Сб.: Механика и процессы управления / УНЦ. — Екатеринбург, 2007.— С. 77–85.

3. **Бухарцев, В.Н.** Гидравлическая форма условия минимума диссипации для безнапорных потоков в призматических руслах [Текст] / В.Н. Бухарцев, М.Р. Петриченко // Инженерно-строительный журнал.— 2008. №2.— С. 5–7.

4. **Бакельман, И.Я.** Геометрические методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Я. Бакельман.— М.: Наука, 1966.— 340 с.