УДК 517.97

О.А. Иванова, В.И. Зубов,
А.Ф. Зубова, М.В. Стрекопытова

ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

В своем трактате «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [1] А. Пуанкаре приводит несколько примеров (третий мемуар, гл. X). Один из них такой:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho-1)(\rho-2)\,, \tag{1}$$

где ρ — радиус-вектор на плоскости $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; ω — полярный угол. Прямоугольные координаты x, y определяются соотношениями $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$. Окружности $\rho=1$, $\rho=2$ являются предельными циклами. Причем, поскольку общее решение есть

$$\rho=\frac{Ce^{\omega}-2}{Ce^{\omega}-1},$$

легко видеть, что решение, выходящее из окружности достаточно малого радиуса с центром в начальной точке, никогда более не возвращается в нее. Подвижная точка, находящаяся внутри этого кольца, все время остается внутри него. Для качественного исследования уравнения (1) нет необходимости применять аппарат функций Ляпунова, поскольку роль такой функции уже выполняет радиус-вектор $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Возможно, что именно эти рассуждения и являются предысторией второго метода.

Постановка задачи

Основная задача математической теории автоматического регулирования — установление условий и конструирование систем, при которых траектории системы остаются в заданном множестве G_t, начинаясь в множестве G_{t_0}. Если таким заданным множеством G_t для системы (1) будет кольцо, ограниченное окружностями $\rho=1$, $\rho=2$, то множество G_{t_0} — это круг $0\le\rho\le 2$. Если ставится задача о «двусторонней устойчивости» такого кольца, то уравнение (1) не годится, так как траектория, начинающаяся вне круга $0\le\rho\le 2$, уходит на бесконечность.

Для конструирования систем с подобными требованиями (они являются обобщением требования об устойчивости решения $\rho=\beta$, $\beta=\text{const}$) систему (1) модифицируем следующим образом:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho-1)(\rho-2)(\alpha-\rho)\,, \tag{2}$$

где $1<\alpha<2$. Действительно, при $\rho_0<1$ будет выполняться $\rho \underset{\omega\to+\infty}{\to} 1$; при $\rho_0>2$ будет $\rho \underset{\omega\to+\infty}{\to} 2$; решение $\rho=\alpha$ — неустойчиво; для всех траекторий, начинающихся в кольце $1<\rho_0<\alpha$, будет $\rho \underset{\omega\to+\infty}{\to} 1$, а для всех траекторий, начинающихся в кольце $\alpha<\rho_0<2$, будет выполняться $\rho \underset{\omega\to+\infty}{\to} 2$. Уравнение (2) известно как уравнение Абеля 1-го рода и было открыто Н. Абелем в 1824 году. Из уравнения (2) видно, что все траектории неограниченно продолжаемы. Заметим, что характер поведения кривых не изменится, если правую часть уравнения (2) умножить на любую положительную функцию аргументов x, y, $t(\omega)$. Таким образом, общим видом уравнения, обеспечивающего асимптотическую устойчивость кольца с радиусами a, $b\,(a\le b)$ при условии существования решений, будет обобщенное уравнение Абеля 1-го рода

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho-a)(\rho-b)(\alpha-\rho)f(x,y,\omega), \tag{3}$$

где $f>0$, причем величины a, b, α могут быть функциями времени [2]. Заметим, что при $b\to a$ наша задача переходит в задачу об устойчивости предельного цикла $\rho=a$ и уравнение принимает вид

$$\frac{d\rho}{d\omega}=-(\rho-\alpha)^3 f(x,y,\omega).$$

Если задача не состоит в изучении траекторий внутри кольца G_t, то уравнение (3) может быть заменено уравнением Абеля II-го рода

$$(\alpha-\rho)\frac{d\rho}{d\omega}=(\rho-a)(\rho-b)f(x,y,\omega). \qquad (4)$$

В этом случае при $b \to a$ наша задача переходит в задачу об устойчивости предельного цикла $\rho=a$ и уравнение принимает привычный в теории устойчивости вид

$$\frac{d\rho}{d\omega}=-(\rho-a)f(x,y,\omega). \qquad (5)$$

Все вышеизложенное наводит на мысль о том, что, рассматривая задачу об устойчивости нулевого решения возмущенной системы по второму методу Ляпунова, не представляется возможным конструировать системы управления для задач в общей постановке. Для построения математической модели управляемого процесса желательно использовать подход, который совмещал бы в себе основные черты классических постановок в предельном случае, но в то же время был работоспособен и в случае неединственности решений. Иначе говоря, желательно строить такие математические модели, для которых требование устойчивости или асимптотической устойчивости положения равновесия $X=0$ заменяют требованием устойчивости множества, возможно, даже не инвариантного, причем устойчивость понимается в определенном смысле [4].

В теории нелинейных систем автоматического управления (САУ) это известно как элемент типа «люфт» [3].

Покажем, что качественная картина плоских траекторий сохраняется и в скалярном случае. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{X}=f(X,t) \qquad (6)$$

и поставим вопрос о существовании двух решений — $X=a$, $X=b$, каждое из которых было бы условно асимптотически устойчивым. Пусть сначала a, b — постоянные и $a<b$. Потребуем, чтобы

$$X(t,X_0)\underset{t\to+\infty}{\to} a \quad \text{при} \quad X_0<a,$$

$$X(t,X_0)\underset{t\to+\infty}{\to} b \quad \text{при} \quad X_0>b.$$

Поведением решений при $a<X_0<b$ пока интересоваться не будем.

Рассмотрим уравнение Абеля II-го рода

$$(X-c)\dot{X}=(X^2+a_1X+a_0)f(t).$$

Если $a_1^2 \ge 4c$, то это уравнение приводится к виду

$$\dot{X}=(X-a)(X-b)(c-X)^{\alpha}G(X,t); \qquad (7)$$

здесь $a<c<b$, $\alpha=-1$. Пусть также пока $c=\text{const}$.

Теорема 1. Если функция $G(X,t)$ является знакопостоянной положительной в полосе

$$\{0<t_0<t;\ X<a-\varepsilon_1;\ b+\varepsilon_2<X\},$$

где ε_1, ε_2 — положительные числа, то решения $X=a$, $X=b$ условно асимптотически устойчивы, причем при $\alpha=+1$ все решения системы (7) неограниченно продолжаемы вправо и ограничены.

Доказательство. Продифференцируем функцию

$$V(X)=(X-c)^2.$$

В силу системы (7) получим

$$\dot{V}(X)=2V(X-b)(c-X)^{\alpha}G(X,t). \qquad (8)$$

Знак производной функции $V(X)$ определяется произведением сомножителей $(X-b)(c-X)^{\alpha}$, которое всегда отрицательно при $X<a$. Следовательно, решение $X=a$ условно асимптотически устойчиво при $X_0<a$. Продифференцируем теперь функцию $V_1(X)=(X-b)^2$ в силу системы (7); получим

$$\dot{V}_1(X)=2V_1(X-a)(c-X)^{\alpha}G(X,t). \qquad (9)$$

Знак производной функции $V_1(X)$ определяется произведением сомножителей $(X-a)(c-X)^{\alpha}$, которое всегда отрицательно при $b<X$. Следовательно, решение $X=b$ условно асимптотически устойчиво при $b<X_0$. При $\alpha=+1$ правая часть системы (7) определена и непрерывна, а решения, учитывая (8), (9), ограничены:

$$\|X(t,X_0,t_0)-a\|<\|X_0-a\| \quad \text{при} \quad X_0<a;$$

$$\| X(t, X_0, t_0) - b \| < \| X_0 - b \| \text{ при } b < X_0 .$$

При $a < X_0 < b$ справедливо $a \le X(t, X_0, t_0) \le b$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$. Заметим, что при $b \to a$ и $\alpha = -1$ уравнение (7) принимает вид

$$\dot{X} = -XG_1(X,t), \qquad (10)$$

где функция $G_1(X,t)$ — положительна в некоторой окрестности точки $X = 0$ при $t > 0$, что обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $X = 0$, если оно существует. Если в уравнении (3) $G(X,t) = G(t)$, то при $\alpha = 1$ уравнение (7) является уравнением Абеля 1-го рода, при $\alpha = -1$ — уравнением Абеля II-го рода. Таким образом, показано, что этот известный тип уравнений является не математической «экзотикой», а весьма актуальным направлением в анализе и синтезе математических моделей управляемых систем.

Можно рассматривать эту задачу и в иной постановке, считая параметры *a*, *b*, *c* функциями времени.

Существование автоколебаний в динамических системах, устойчивых по Лагранжу

При компьютерном моделировании пренебрежение наличием инвариантных множеств может привести к принципиально неверным прогнозам динамики системы. Прогнозирование состояния системы, сделанное с помощью компьютера, может иметь приемлемую точность, если дискретизованная модель сохраняет основные структурные особенности моделируемой системы, в число которых входят наличие стационарных и нестационарных инвариантных множеств, их свойства и характер предельного поведения траекторий системы. Все это требует тщательного аналитического исследования уравнений динамики для обнаружения этих свойств. Кроме того, сами алгоритмы дискретизации требуют такого их изменения, чтобы указанные структурные свойства непрерывной модели сохранялись и у дискретной модели, уже пригодной для компьютерной реализации.

Пусть исследуемая система описывается динамической системой $f(p, t)$ в ограниченном замкнутом множестве R евклидова пространства E_n .

Определение 1. Множество $M \subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т. е. из $p \in M$ следует $f(p, I) \subset M$.

Определение 2. Инвариантное множество $M \subset R$ динамической системы $f(p, t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\rho(p, M) < \delta \Rightarrow \rho(f(p,t), M) < \varepsilon$, $\forall t > 0$.

Если δ к тому же можно выбрать так, что будет выполняться

$$\rho(f(p,t), M) \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

то инвариантное множество M называется *асимптотически устойчивым*.

Согласно терминологии А.М. Ляпунова, устойчивость инвариантного множества M означает устойчивость всех движений $f(p, t)$ (где $p \in M$) по отношению к величине $\rho(p, M)$.

Определение 3. *Автоколебанием динамической системы* $f(p, t)$ называется инвариантное устойчивое по Ляпунову и асимптотически устойчивое множество M, не имеющее собственного подмножества с такими же свойствами [2].

Определение 4. Точка $q \in R$ называется *ω-предельной точкой движения динамической системы* $f(p, t)$, если существует последовательность значений параметра $\{t_k\} : t_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ такая, что

$$f(p_k, t_k) \underset{k\to\infty}{\to} q .$$

Множество ω-предельных точек индивидуального движения $f(p, t)$ обозначим Ω_f. Это множество — инвариантное и связное [4]. В нашем случае, когда траектории всех движений принадлежат ограниченному множеству R, множество Ω_p не пусто для любой точки $p \in R$ [3]. Обозначим Ω_f совокупность всех ω-предельных точек движений $f(p, t)$ при $p \in R$: $\Omega_f = \bigcup\limits_{p \in R} \Omega_p$.

Теорема 2. Множество Ω_f является инвариантным, устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым множеством динамической системы $f(p,t)$.

Доказательство. Множество Ω_f является инвариантным, так как представляет собой совокупность инвариантных множеств Ω_p , где точки p принадлежат замкнутому множеству R. Докажем свойство его устойчивости по Ляпунову. Покажем сначала, что $f(p,t) \underset{t\to\infty}{\to} M \quad \forall p \in R$.

Действительно [2], для каждого индивидуального движения $f(p, t)$ выполнено

$$\rho(f(p,t), \Omega_p) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Но по свойству метрического расстояния справедливо

$$\rho(f(p,t), \Omega_f) \le \rho(f(p,t), \Omega_p).$$

Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно указать T такое, что при $t > T$ будет выполнено $\rho(f(p,t), \Omega_f) < \varepsilon \ \forall p \in R$. По свойству непрерывности $f(p, t)$ по своим аргументам по величинам T, ε можно указать величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p, \Omega_f) < \delta$ будет выполнено $\rho(f(p,t), \Omega_f) < \varepsilon$ при $0 \le t \le T$.

Покажем, что найденная величина δ удовлетворяет определению устойчивости по Ляпунову. Действительно, при выполнении условия $\rho(p, \Omega_f) < \delta$ величина $\rho(f(p,t), \Omega_f)$ остается меньше величины ε на интервале $[0, T]$ по свойству интегральной непрерывности, а на интервале $(T, +\infty)$ — по доказанному выше свойству, из которого следует также асимптотическая устойчивость множества Ω_f.

Теорема 3. Множество Ω_f содержит автоколебание.

Доказательство. Действительно, если у Ω_f нет собственного подмножества с установленными свойствами, то оно само является автоколебанием; если есть, то возьмем это подмножество в качестве «подозрительного» на автоколебание. Продолжая данный процесс, можно найти множество, обладающее установленными в теореме 1 свойствами и не имеющее собственного подмножества с указанными свойствами. Оно и будет автоколебанием.

Изложенное связано с исследованиями Дж. Биркгофа и Г. Хильми [1], однако ранее не была установлена устойчивость по Ляпунову совокупности множеств предельных точек индивидуальных движений, принадлежащих ограниченному множеству.

Из полученного результата следует наличие предельного режима у броуновского движения. Иными словами, совокупность движений в ограниченном множестве имеет предельный режим, однако структура этого предельного режима может быть весьма сложной. Имеющиеся примеры странных аттракторов доказывают это.

Наличие только неустойчивых по отношению к расстоянию между ними движений, принадлежащих предельному режиму, показывает, что в этом случае траектории предельного режима Ω_f будут плотными.

Следует отметить, что понятия устойчивости и асимптотической устойчивости инвариантного множества подразумевают его изолированность, т. е. существуют точки пространства, не принадлежащие инвариантному множеству и находящиеся в его достаточно малой окрестности. Если таких точек нет, то и исследование устойчивости инвариантного множества становится бессмысленным. Возможно, это условие следовало бы включить в определения устойчивости и асимптотической устойчивости для парирования экзотических контрпримеров. Кроме того, необходимо помнить о том, что наличие достаточно малой компактной окрестности, не содержащей целых траекторий, является необходимым условием асимптотической устойчивости инвариантного множества [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10–08–00624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] / А.В. Зубов, С.В. Зубов.— СПб: ВВМ, 2011.— 323 с.

2. **Зубов, А.В.** Управление динамическими системами [Текст] / А.В. Зубов, О.А. Шабурова.— СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2005.— 83 с.

3. **Зубов, А.В.** Динамическая безопасность управляемых систем [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов.— СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2009.— 172 с.

4. **Зубов, А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] / А.В. Зубов, С.В. Зубов.— СПб.: АООТ «Мобильность-плюс», 2012.— 357 с.