УДК 621.001.5:331.01

А.Г. Ташевский

МОДЕЛИ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Редкими событиями можно считать быстро развивающиеся изменения больших масштабов, самопроизвольно возникающие в системе. Примером такого процесса может быть развитие трещины в твердом теле.

Из-за редкости событий условия их возникновения, сколь детерминированными они бы ни были, воспринимаются как крайне редкое сочетание маловероятных случайностей. Выделить «суть дела», «параметры порядка» оказывается очень сложно.

В теории обеспечения безопасности сложных технических систем было пройдено два больших этапа. На первом этапе предполагалось, что надлежащие инженерные решения, организационные меры, квалифицированные и дисциплинированные сотрудники могут обеспечить абсолютно надежное функционирование сколь угодно сложных технических или социально-технологических систем. Такой взгляд часто называют теорией абсолютной надежности.

Жизнь заставила скорректировать его. Начиная с определенного порога сложности приходится иметь дело с вероятностными характеристиками аварий и катастроф в природной и техногенной сфере. И до недавнего времени снижение соответствующих вероятностей рассматривалось как один из главных путей управления риском. Родился вероятностный подход к анализу надежности сложных технических систем. Его характерные трудности таковы. Во многих случаях приходится сталкиваться с редкими событиями и уникальными конструкциями, для которых корректно определить соответствующую вероятность очень трудно, поскольку, с одной стороны, нет достаточной статистики, чтобы опираться на опыт, а с другой, — нет теории, которая позволяла бы выводить эти величины исходя из первых принципов.

Традиционный подход теории надежности, связанный с построением дерева отказов, учитывает лишь простейшие взаимосвязи между элементами сложной системы, в то время как для сложных систем характерно взаимное влияние различных элементов, более сложные причинно-следственные связи. Кроме того, зачастую неудовлетворительным оказывается сам характер ответов, связанных с вероятностным анализом. Допустим, что надежность уникального объекта, от которого зависит наше существование, определяется как одна возможная авария на миллион лет. Удовлетворит ли нас такая информация? Знание только этой вероятности ничего не говорит о том, когда можно ждать наступления такого события: оно может произойти и завтра, и через тысячи лет. Этот парадокс сродни следующему. Вероятность того, что бесконечно тонкое острие иглы попадет в данную точку листа бумаги, равна нулю, но если мы бросаем иглу, то в какую-то точку она тем не менее попадет. Если авария произошла, естественно пересчитать те вероятности, на основе которых принимались решения о строительстве и эксплуатации объекта. Найти корректную процедуру для этой операции обычно оказывается нелегко.

Поскольку зачастую «слабым звеном» является человек, состояние сложной системы, ее безопасность сплошь и рядом нельзя оценивать без учета того, какие люди и в каких условиях работают в ней. Возникает проблема комплексной оценки риска в эргономико-технологических системах. Нелинейная динамика выявляет общие закономерности функционирования и развития сложных систем в природной, техногенной и социальной сферах. На ее основе удалось выделить многие важные универсальные закономерности в различных областях. Другими словами, анализ риска и безопасности предполагает сегодня междисциплинарный анализ, основой которого могут служить концепции, идеи и методы нелинейной динамики.

Исключительно важное значение как для нашей страны, так и для других промышленно развитых стран имеет достигнутый уровень проектного обоснования безопасности потенциально опасных объектов. Применительно к объектовым и локальным авариям для крупносерийных технических систем, в которых опасные повреждения возникают в нормальных условиях эксплуатации, уровень достоверности проектного обоснования безопасности и надежности составляет от 10 до 100 %. При этом большое значение имеют национальные и международные нормы проектирования, изготовления и эксплуатации, а также огромный и длительный опыт обеспечения безопасного функционирования этих систем.

Опасные и катастрофические разрушения крупно- и среднесерийных технических систем в условиях нормальной эксплуатации прогнозируются уже в существенно меньшей мере — от 1 до 10 %. Предварительный количественный анализ крупных аварийных ситуаций удается пока проводить в 0,1–1,0 % случаев. Конкретные техногенные катастрофы регионального и национального характера получают отражение в расчетах и прогнозах не более чем в 0,001–0,1 %. Глобальные катастрофы, как правило, не предсказываются.

При анализе безопасности сложных технических систем сформулированы аварийные ситуации трех основных видов: проектные, запроектные и гипотетические. Во многих технических системах их характеризуют такие параметры, как локальное напряжение σ и деформация ε, число циклов N, температура t и время τ эксплуатации. В зависимости от типа потенциально опасных объектов имеет место очень широкая вариация этих параметров ($100 < N < 1012$; -270 °C $< t <$ 10000 °C; 100 с $< \tau <$ 80 лет).

Проектные аварийные ситуации, как правило, охватывают области накопления повреждений, описываемых классическими теориями сопротивления материалов — теориями упругости, пластичности и ползучести. Расчетные и экспериментально определяемые напряжения и деформации при этом остаются на уровне предела упругости. При переходе к запроектным авариям обычно анализируются нелинейные закономерности деформирования и разрушения; при этом напряжения становятся менее информативными параметрами, чем деформации. Повреждения от вибраций переходят в повреждения от малоцикловой усталости. Еще большее возрастание σ и ε обусловливает переход к гипотетическим авариям и катастрофам. При этом теоретической основой анализа таких ситуаций служит статическая и динамическая нелинейная механика разрушений.

Одним из примеров такого подхода к количественному анализу развития аварийных ситуаций может служить расчетно-экспериментальное обоснование безопасности атомной станции теплоснабжения АСТ-500, выполненное в ОКБМ МАЭ (г. Нижний Новгород) и ИМАШ РАН (г. Москва). В качестве барьеров выхода радиоактивности при тяжелой аварии рассмотрены корпус реактора, страховочный корпус и контаймент. Поэтому рассчитываемое и контролируемое развитие аварий с образованием и распространением трещин, с раскрытием главных болтовых разъемов дает не мгновенное катастрофическое разрушение, а монотонно нарастающие (в течение часов) давление, температуру и утечки. В этом случае могут быть применены системы аварийной защиты, меры локализации аварии и механизмы управления чрезвычайной ситуацией. По такому пути предстоит идти во многих других потенциально опасных ситуациях.

Высокая цена ошибочных решений при прогнозировании явлений техногенной природы и эксплуатационных процессов предъявляет свои требования к совершенствованию математического аппарата, методам моделирования редких событий и экстремальных значений случайных величин. Наиболее распространенной моделью редких событий является распределение Пуассона

$$P_n = P\{r = n\} = \frac{V^n e^{-v}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Но довольно часто приходится сталкиваться с редкими событиями реального мира, которые не могут быть строго и точно предсказаны с помощью закона Пуассона. Роль и универсальность этого закона в литературе, ориентированной на решение прикладных задач, оказалась, к сожалению, преувеличенной. Дадим краткое описание некоторых типов распределений редких событий, которые обладают определенной степенью универсальности (в рамках схематизации стохастического эксперимента) и допускают содержательную модификацию, учитывающую специфику приложений в области экономических проблем. Общее в формировании таких моделей — это рандомизация параметра закона Пуассона и использование аппарата производящих функций (ПФ).

Рассмотрим некоторые обобщения (модификации) пуассоновского распределения. Пусть параметр v пуассоновского распределения сам является случайной величиной с математическим ожиданием m, дисперсией σ^2 и распределением по нормальному закону. Для решения такого род задач целесообразно воспользоваться аппаратом производящих функций.

Если случайная величина r принимает только целые неотрицательные значения, то производящей функцией распределения называется функция комплексного переменного t вида

$$f_r(t) = E\left[t^r\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n(r=n),$$

где $|t| \le 1$.

Перечислим важнейшие и вполне очевидные свойства производящих функций:

1. Если $P\{n<0\}=1$, то $f_r(t)=1$.

2. Если $E|n|^k < \infty$ для некоторого целого $k \ge 1$, то $\frac{d^k}{dt^k} f_r(t)\Big|_{t=1} = E\left[r^k\right]$.

3. Если случайные величины $r_1, r_2, \ldots r_n$ независимы, то $f_{r_{1+r_2+r_n}}(t) = f_{r_1}(t) f_{r_2}(t) \ldots f_{r_n}(t)$.

4. Если производящие функции распределений случайных величин r_1 и r_2 совпадают, то совпадают и функции распределения r_1 и r_2.

По производящей функции распределение восстанавливается однозначно согласно формуле

$$P_n = \frac{1}{n!} f_r^{(n)}(0).$$

Обратимся снова к задаче рандомизации параметра v пуассоновского распределения.

Производящая функция распределения Пуассона имеет вид

$$f(t) = e^{v(t-1)}. \quad (2)$$

Математическое ожидание ПФ $\overline{f}(t)$ определяется в результате осреднения:

$$E\left[f(t)\right] = \overline{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{v(t-1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(m-v)^2}{2\sigma^2}} dv. \quad (3)$$

Нижний предел интеграла (3) предполагает справедливость условия $\sigma \ll m$ практически (то есть $m > 3\sigma$). Сводя интеграл (3) к интегралу Пуассона, находим

$$\overline{f}(x) = e^{m(1-t)+\frac{\sigma^2}{2}(t-1)^2}. \quad (4)$$

По вновь полученной ПФ (4) сложнопуассоновское распределение определяется однозначно по формуле

$$P_n = \frac{1}{n!} \overline{f}^{(n)}(t)\Big|_{t=0}.$$

Так, например, последовательно дифференцируя и приравнивая $t = 0$, находим

$$P_0 = e^{-m+\frac{\sigma^2}{2}};$$

$$P_1 = P_0 c;$$

$$P_2 = P_0\left(c^2+\sigma^2\right)\frac{1}{2};$$

$$P_3 = P_0\left(c^3+3c\sigma^2\right)\frac{1}{6};$$

$$P_4 = P_0\left(c^4+6c^2\sigma^2+3\sigma^4\right)\frac{1}{24};$$

$$P_5 = P_0\left(c^5+10c^3\sigma^2+15c\sigma^4\right)\frac{1}{120};$$

$$P_6 = P_0\left(c^5+15c^4\sigma^2+45c^2\sigma^4+15\sigma^6\right)\frac{1}{720};$$

$$P_7 = P_0\left(c^7+21c^5\sigma^2+105c^3\sigma^4+105\sigma^6\right)\frac{1}{5040};$$

....

$$P_{12} = P_0\Big(c^{12}+66c^{10}\sigma^2+1485c^8\sigma^4+13860\sigma^6+$$

$$+51975c^4\sigma^8+62370c^2\sigma^{10}+10395\sigma^{12}\Big)\frac{1}{4{,}79\cdot 10^8},$$

где $c=\left(m-\sigma^2\right)$.

Методология решения задачи и основные расчетные зависимости

Анализ экстремальных величин редких событий играет важную роль при изучении эксплуатационных процессов (явлений) и при решении прикладных задач промышленного мониторинга. Классическая теория экстремальных распределений в основном имеет дело со свойствами распределения n независимых и одинаково распределенных случайных величин и базируется на так называемом «постулате устойчивости», согласно которому распределение наибольшей величины должно быть равно исходному распределению с точностью до линейного преобразования.

Асимптотическое поведение наибольшего наблюдения в выборке объема n из распределения $F(x)$ составляет задачу классической теории экстремальных значений. Центральный результат этой теории (теорема о трех типах предельных распределений) впервые был получен Фишером и Типпетом (1928) и позднее был доказан в полной общности Б.В. Гнеденко (1943). Однако здесь необходимо отметить некоторые специфические ограничения асимптотических теорий экстремальных величин. Прежде всего, все предельные распределения экстремальных значений выводятся либо из точного исходного распределения, либо из распределения некоторого типа. Так, например, исходное распределение, из которого выбираются экстремальные значения, должно принадлежать к одному из распределений следующих типов:

$$f(x)=\exp\left(e^{-x}\right) \text{ при } x\in(-\infty,\infty);$$

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^{-a}\right) \text{ при } x>0, a>0,\\ 0 \text{ при } \qquad\qquad x\le 0;\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^{-a}\right) \text{ при } a>0, x>0,\\ 0 \text{ при } \qquad\qquad x>0.\end{cases}$$

В действительности аналитические свойства исходного распределения редко известны, следовательно, условия использования асимптотической теории экстремальных значений и постулата устойчивости не всегда соответствуют наблюдениям и практическим приложениям.

Это приводит к необходимости использовать принцип максимума неопределенности для выявления механизма формирования необходимых экстремальных величин. Неопределенность исхода стохастического эксперимента обусловливает необходимость ее количественного описания и введения меры неопределенности. В качестве наиболее общей меры неопределенности распределения вероятностей случайной величины целесообразно использовать энтропию Шеннона. При выборе модели экстремальных величин предполагают, как правило, использовать неполную (ограниченную) информацию о схеме (механизме) формирования наблюдаемых случайных величин. Незнание законов распределения случайных величин не исключает возможности их выбора из множества допустимых на основе использования меры неопределенности.

Достаточным основанием для такого выбора являются следующие соображения. Приписывая случайной величине некоторые распределения, имеющие ряд свойств, совпадающих со свойствами действительного (неизвестного) распределения, мы совершаем по необходимости некоторый произвол: выбор одного из множества рассматриваемых распределений однозначно определяет и те характеристики, которые по условию неизвестны. Очевидно, что предпочтение надо отдать тому из рассматриваемых распределений, которое добавляет минимум информации к уже имеющейся. Другими словами, в процессе выбора модели должна оставаться максимальная неопределенность при учете заданных ограничений. Эта концепция, известная под названием принципа неопределенности (максимум энтропии, принцип Джейнса и др.), предписывает выбирать из множества характеризующихся заданными свойствами распределений, удовлетворяющих данной системе ограничений, накладываемых на случайную величину, то, которое обладает наибольшей мерой неопределенности (наибольшей энтропией). Учитывая, что многие задачи вероятностного анализа экономической информации могут быть сформулированы в терминах порядковых статистик и связаны с изучением экстремальных значений, целесообразно распределение экстремальных случайных величин формировать на основе решения соответствующего класса вариационных задач.

Процедура построения модели экстремальных величин на основе принципа максимума неопределенности представлена в работе [8].

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию $F_n(x)$ распределения наибольшего значения случайной величины из выборки объема n, имеет следующий вид:

$$n\sigma^2\left[F_n(x)\right]\frac{n-1}{n}\overline{F}_n(x)+(x-m)\overline{F}_n(x)=0, \quad (6)$$

где m и σ^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия генеральной совокупности случайных величин.

Нелинейное дифференциальное уравнение (6) удовлетворяет естественным краевым условиям

$$F_n(-\infty)=0, \qquad F_n(\infty)=1.$$

Ему соответствует функция $F(x)$ распределения исходной случайной величины, определяемая в результате решения следующего дифференциального уравнения с теми же краевыми условиями:

$$n\sigma^2\overline{F}(x)\left[F(x)\right]^{n-1}+$$
$$+n\sigma^2(n-1)\left[\overline{F}(x)\right]^2\left[F(x)\right]^{n-2}+$$
$$+\overline{F}(x)(x=m)=0. \quad (7)$$

Эти уравнения неразрешимы в квадратурах при $n \neq 1$. При $n = 1$ уравнениям (6) и (7) удовлетворяет функция нормального распределения с параметрами m и σ^2. При практически больших значениях аргумента ($x > 3\sigma$) функция распределения $F_n(x)$ асимптотически приближается к функции гауссова распределения с параметрами (m, $n\sigma^2$) Это обстоятельство послужило основанием назвать гипернормальным введенный в рассмотрение экстремальный закон распределения наибольшего значения из совокупности n случайных величин.

Дифференциальное уравнение (6), определяющее функцию $F_n(x)$ распределения наибольшего значения, является уравнением Эйлера — Лагранжа для следующей экстремальной задачи:

$$H_\alpha=-\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ln f_n(x)dx \to \max; \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx=1; \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1; \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=m; \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx=\sigma^2; \quad (12)$$

$$F_n(x)=F^n(x). \quad (13)$$

Гипернормальное распределение — это распределение крайней порядковой статистики (ранга n), максимизирующее энтропию при тех же условиях, при которых ее максимизирует нормальный закон распределения. Такая интерпретация рассматриваемых экстремальных (нормального и гипернормального) распределений позволяет четко разграничить условия их применения. В компактной форме эти условия представлены в табл. 1. Можно утверждать, что с ситуациями, представленными в этой таблице, мы в процессе эксплуатации сложных технических систем встречаемся часто. Действительно, при решении ряда задач едва ли можно надеяться на полноту исходной информации, обеспечивающую возможность оценки третьего и более высоких моментов распределения. Кроме того, для многих случайных величин соотношение между средними и среднеквадратическими отклонениями таково, что область возможных значений случайной величины можно считать практически неограниченной. Следует также заметить, что многие задачи оценки и прогноза техногенных и эксплуатационных ситуаций и процессов могут быть связаны с изучением экстремальных значений.

Значения функций гипернормального распределения для некоторых целочисленных параметров n, полученные в результате решения нелинейной краевой задачи (6), приведены в табл. 2.

Вычисление функций $F_n(x)$ произведено для стандартных условий ($m = 0$, $\sigma = 0$).

При больших n (более 10) дифференциальное уравнение (6) можно заменить приближенным и найти аналитическое решение в форме квантильной функции.

Для стандартных условий ($m = 0$, $\sigma = 1$) дифференциальное уравнение (6) при $n \to \infty$ может быть представлено в виде

Таблица 1

Условия применения экстремальных распределений

Нормальный закон распределения	Гипернормальный закон распределения
1. Истинный закон распределения случайной величины неизвестен	1. Истинный закон распределения случайной величины неизвестен
2. Область возможных значений случайной величины практически неограниченна	2. Область возможных значений случайной величины практически неограниченна
3. Заданы среднее значение и дисперсия случайной величины	3. Заданы среднее значение и дисперсия случайной величины
4. Вероятностный эксперимент предполагает использование выборки конечного объема (последовательности независимых одинаково распределенных неупорядоченных случайных величин)	4. Вероятностный эксперимент предполагает использование упорядоченной по величине последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин)

Таблица 2

Значения функции гипернормального распределения

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$F_7(x)$	$F_8(x)$	$F_9(x)$	$F_{10}(x)$
–2,0	0,0228	0,0005	–	–	–	–	–	–	–	–
–1,8	0,0360	0,0009	–	–	–	–	–	–	–	–
–1,6	0,0543	0,0063	–	–	–	–	–	–	–	–
–1,4	0,0803	0,0181	0,0005	0,0003	0,0002	–	–	–	–	–
–1,2	0,1151	0,0339	0,0017	0,0006	0,0013	0,0001	0,0002	0,0005	0,0003	0,0002
–1,0	0,1587	0,0641	0,0083	0,0018	0,0017	0,0030	0,0025	0,0058	0,0048	0,0046
–0,8	0,2119	0,1090	0,0402	0,0225	0,0197	0,0244	0,0244	0,0311	0,0310	0,0308
–0,6	0,2743	0,1664	0,0923	0,0691	0,0635	0,0672	0,0670	0,0708	0,0708	0,0707
–0,4	0,3446	0,2329	0,1561	0,1285	0,1191	0,1197	0,1169	0,1169	0,1162	0,1160
–0,2	0,4207	0,3053	0,2264	0,1935	0,1800	0,1768	0,1683	0,1660	0,1634	0,1632
0,0	0,5000	0,3804	0,2993	0,2612	0,2431	0,2355	0,2210	0,2162	0,2116	0,2114
0,2	0,5722	0,4555	0,3723	0,3289	0,3062	0,2943	0,2737	0,2665	0,2598	0,2596
0,4	0,6554	0,5285	0,4435	0,3951	0,3681	0,3521	0,3256	0,3161	0,3074	0,3072
0,6	0,7257	0,5967	0,5115	0,4589	0,4278	0,4061	0,3762	0,3644	0,3539	0,3537
0,8	0,7881	0,6615	0,5754	0,5191	0,4847	0,4617	0,4250	0,4113	0,3990	0,3988
1,0	0,8415	0,7195	0,6346	0,5756	0,5385	0,5128	0,4718	0,4563	0,4425	0,4423
1,2	0,8848	0,7710	0,6886	0,6280	0,5889	0,5609	0,5164	0,4994	0,4842	0,4841
1,4	0,9191	0,8160	0,7375	0,6761	0,6357	0,5060	0,5587	0,5404	0,5240	0,5239
1,6	0,9451	0,8545	0,7810	0,7199	0,6789	0,6482	0,5986	0,5792	0,5619	0,5618
1,8	0,9640	0,8869	0,8194	0,7595	0,7185	0,6878	0,6361	0,6159	0,5979	0,5911
2,0	0,9771	0,9137	0,8529	0,7949	0,7546	0,7229	0,6711	0,6504	0,6318	0,6317
2,2	0,9860	0,9354	0,8817	0,8263	0,7972	0,7557	0,7038	0,6827	0,6637	0,6636
2,4	0,9917	0,9527	0,9063	0,8540	0,8165	0,7857	0,7341	0,7128	0,6937	0,6936
2,6	0,9952	0,9662	0,9271	0,8782	0,8427	0,8129	0,7621	0,7409	0,7217	0,7216
2,8	0,9973	0,9766	0,9444	0,8992	0,8660	0,8374	0,7878	0,7669	0,7478	0,7477
3,0	0,9985	0,9844	0,9586	0,9172	0,8865	0,8594	0,8115	0,7909	0,7721	0,7720
3,2	0,9991	0,9902	0,9702	0,9328	0,9044	0,8790	0,8331	0,8131	0,7946	0,7946

$$nF_n(x)\bar{F}_n(x) + x\bar{F}_n(x) = 0.$$

Его решение позволяет получить функции квантилей предельного гипернормального распределения

$$x_p = \sqrt{2n}\sqrt{-\mathrm{Ei}(\ln P)},$$

$$x_p = n + \sigma\sqrt{2n}\sqrt{-\mathrm{Ei}(\ln P)}, \qquad (14)$$

где $\mathrm{Ei}(\ln P)$ — интегральная показательная функция.

Таким образом, функция квантилей гипернормального распределения асимптотически приближается к функции (14). Это свойство рассмотренных экстремальных распределений позволяет по ограниченной информации описать и прогнозировать с определенным уровнем доверия P экстремальные характеристики и строить математические модели «сверхредких» событий.

В том случае, когда в результате статистического обследования ситуации выявлена лишь информация о среднем значении показателя, экстремальное распределение максимального значения параметра определяется решением дифференциального уравнения

$$mn(G(n))^{\frac{n-1}{n}}\bar{G}_n(x) + \bar{G}_n(x) = 0 \qquad (15)$$

при граничных условиях

$$G_n(0) = 0, \quad G_n(\infty) = 1.$$

Справедливость этого положения вытекает из следующего утверждения.

Пусть X — случайная величина с плотностью $g(x) > 0, x \in (0, \infty)$; $G_n(x)$ — функция распределения максимального значения из совокупности, определяемой случайной величиной X. Пусть далее известно математическое ожидание случайной величины X

$$m = \int_0^{\infty} xg(x)dx.$$

Тогда максимум энтропии достигается на распределении, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению (15) с функцией квантилей

$$x_p = mpF\left(1, m, n+1, \sqrt[n]{p}\right). \qquad (16)$$

Дифференциальное уравнение (15) является уравнением Эйлера — Лагранжа для следующей вариационной задачи:

$$H_\varepsilon = -\int_0^{\infty}\bar{G}_n(x)\ln\bar{G}_n\,dx \to \max;$$

$$\int_0^{\infty}\bar{G}_n(x)dx = 1;$$

$$\int_0^{\infty}xg(x)dx = m;$$

$$G_n(x) = \left[\int_0^{x}g(x)dx\right]^n.$$

Формальное интегрирование уравнения Эйлера — Лагранжа при $n = 1$ дает экспоненциальный закон распределения, а при $n \neq 1$ приводит к зависимости вида

$$x = \int_0^{G_n}\frac{dG_n}{vG_n^{\frac{1}{n}} + \bar{C}_n(0)}. \qquad (18)$$

Используя подстановку $z = G_n^{\frac{1}{n}}$, интеграл (18) можно преобразовать к табличному:

$$\int_0^{u}x^{\mu-1}(1+\beta x)^{-v}\,dx = \frac{u}{\mu^2}F(v, \mu, 1+\mu, -\beta u),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, S)$ — гипергеометрическая формула Гаусса.

Подстановка значения множителя Лагранжа в дифференциальное уравнение (18) позволяет убедиться в справедливости дифференциального уравнения (15) и функции квантилей (16).

Таким образом, показано, что многие задачи оценки и прогноза техногенных и эксплуатационных ситуаций и процессов могут быть связаны с изучением экстремальных значений.

Свойство рассмотренных экстремальных распределений позволяет по ограниченной информации описать и прогнозировать с определенным уровнем доверия P экстремальные характеристики и строить математические модели «сверхредких» событий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ташевский, А.Г.** Метод оценки надежности сложных изделий энергомашиностроения при ограниченном числе испытаний [Текст] / А.Г. Ташевский // Труды Санкт-Петербургского института машиностроения. Вып. 2.— СПб., 1996.— 96 с.

2. **Ташевский, А.Г.** Подтверждение ТТХ сложных систем по малому числу испытаний [Текст] / А.Г. Ташевский, Л.А. Мартыщенко, В.И. Немчинов.— Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1985.— 48 с.

3. **Ташевский, А.Г.** Моделирование редких событий при прогнозировании эксплуатационных процессов в сложных системах машиностроения [Текст] / А.Г. Ташевский // Инструмент и технологии.— 2011. № 32, вып. 2.— С. 22–23.

4. **Ташевский, А.Г.** Корректировка математических моделей сложных технических систем по результатам комплексных испытаний [Текст] / А.Г. Ташевский, Л.А. Мартыщенко.— Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1990.— 60 с.

5. **Мартыщенко, Л.А.** Теоретико-информационные и статистические методы формирования систем исходных данных в военно-научных исследованиях [Текст] / Л.А. Мартыщенко, А.Г. Ташевский. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1991.— 48 с.

6. **Мартыщенко, Л.А.** Теоретические основы информационно-статистического анализа сложных систем [Текст] / Мартыщенко Л.А. [и др.].— СПб.: Лань, 1997.

7. **Ташевский, А.Г.** Конструирование узлов трения в объектах машиностроения [Текст] / А.Г. Ташевский, В.Н. Смелов.— СПб.: Изд-во Институт машиностроения, 2008.— 132 с.

8. **Ташевский, А.Г.** Эргономические аспекты сложных технологических систем машиностроения [Текст] / А.Г. Ташевский // Инструмент и технологии.— 2010, №29, вып. 3.— С. 118–124.

9. **Мартыщенко, Л.А.** Экстремальные распределения экстремальных случайных величин [Текст] / Л.А. Мартыщенко.— Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1989.— 62 с.