УДК 531:532

М.Р. Петриченко

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА И УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

M.R. Petrychenko

THE THERMODYNAMIC IDENTITY AND EQUATION NONISOTHERMAL FILTRATION IN POROUS MEDIUM ISOTROPIC

Линейный (градиентный) закон фильтрации Дюпюи трансформирован для неизотермического баротропного течения совершенного газа. Интегральные характеристики фильтрации (коэффициенты проницаемости и фильтрации) связаны с интенсивностью теплообмена по ходу фильтрации. Изотермическая фильтрация получается как предельный случай неизотермической фильтрации при значении показателя политропы $n \to 1 \pm 0$. Доказана нелинейность распределения давления и пассивных примесей по ходу неизотермической фильтрации.

ФИЛЬТРАЦИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ ФИЛЬТРАЦИИ. КОЭФФИЦИЕНТ ПРОНИЦАЕМОСТИ. ПОРИСТАЯ СРЕДА. БАРОТРОПНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Linear (gradient) filtration law Dupuis transformed for non-isothermal barotropic flow of a perfect gas. Integral characteristics of the filter (the coefficients of diffusion and filtration) are related to the intensity of heat transfer in the course of filtration. Isothermal filtration is obtained as a limiting case of isothermal filtration at a value of the polytropic index $n \to 1 \pm 0$. We prove the non-linearity of the pressure distribution and passive impurities in the course of isothermal filtration.

FILTRATION, FILTRATION COEFFICIENT, PERMEABILITY COEFFICIENT OF THE POROUS MEDIUM, BAROTROPIC.

Расчеты фильтрационных движений обычно проводятся для изотермической фильтрации капельных жидкостей и газов. Неизотермическая фильтрация сопровождается теплообменом между пористой средой и фильтруемой жидкостью, что приводит к изменению температуры жидкости по ходу фильтрации.

Для расчета средней скорости фильтрации используется формула Дюпюи

$$v = -\frac{\kappa}{g}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{1}$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$v = \frac{\kappa}{g}\frac{dl_T}{dx}, \tag{1a}$$

где $dl_T = -\frac{dp}{\rho}$ — элементарная техническая работа расширения, связанная с изменением кинетической энергии и с подводом теплоты к лагранжевой частице (к жидкому объему) фильтрующейся жидкости. В данном случае техническая работа выступает в качестве «потенциала фильтрации».

Для учета теплообмена в неявном виде можно использовать условие баротропности движения. Пусть

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \omega^n;$$

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \pi^{\frac{n-1}{n}}, \qquad (2)$$

где n — показатель политропы. Значениям $n < k$ отвечает фильтрационный поток с подводом теплоты по ходу фильтрации, а значениям $n > k$ — отвод теплоты по ходу фильтрации. При $1 < n < k$ подвод теплоты не приводит к нагреванию газа; при $0 < n < 1$ подвод теплоты приводит к нагреванию газа.

С учетом (2) формула (1) может быть записана в одном из двух видов — через безразмерный перепад давления π (2) и через безразмерный перепад температур τ (3):

$$v = -\frac{\kappa}{g}\frac{p_0}{\rho_0}\pi^{-\frac{1}{n}}\frac{d\pi}{dx}; \qquad (1б)$$

$$v = -\frac{\kappa}{g}\frac{p_0}{\rho_0}\frac{n}{n-1}\frac{d\tau}{dx}. \qquad (1в)$$

Очевидно, что при $n \to 1 \pm 0$ выражение (1*в*) становится неопределенным. Но

$$\lim_{n\to 1\pm 0}\frac{n}{n-1}\frac{d\tau}{dx} = \lim_{n\to 1\pm 0}\frac{n}{n-1}\frac{d\pi^{\frac{n-1}{n}}}{dx} = \frac{d\ln\pi}{dx},$$

что приводит к (1*б*), $n = 1$. При $n \to \pm\infty$ формулы (1*б*, *в*) превращаются в формулы фильтрации для капельной жидкости.

В фильтрационном движении массовая скорость $\rho v = \mathrm{const}$. В силу (1 *б*,*в*)

$$\rho v = -\frac{\kappa}{g}p_0\frac{d\pi}{dx}; \qquad (1г)$$

$$\rho v = -\frac{\kappa}{g}\frac{n}{n-1}p_0\tau^{\frac{1}{n-1}}\frac{d\tau}{dx} \qquad (1д)$$

и, на первый взгляд, распределение давления по ходу фильтрации должно быть линейным при любом, неизотермическом и изотермическом, течении. Но коэффициент фильтрации κ связан с коэффициентом проницаемости s (эффективное сечение фильтрации) тождеством

$$\frac{\kappa}{g} = \frac{s}{\nu}. \qquad (3)$$

Для совершенного газа $\nu = \nu_0\tau^m$; $\frac{1}{2} < m < 1$. Стало быть, в силу (3)

$$\rho v = -\frac{s}{\nu_0}p_0\pi^{-\frac{m(n-1)}{n}}\frac{d\pi}{dx}. \qquad (1е)$$

Пусть (см. рис. 1) $\pi(0) - 1 = \pi(\delta) - \pi_1 = 0$. Тогда в силу (1*е*)

$$\pi = \left(1 - \left(1 - \pi_1^{1-r}\right)\frac{x}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-r}}, \qquad (4)$$

где $r := \frac{m(n-1)}{n}$; $r > 0$ при $n > 1$ и $r < 0$ при $n < 1$. Следовательно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1

При отводе теплоты или при слабом подводе теплоты, недостаточном для увеличения температуры фильтрационного потока по ходу фильтрации, кривая давления имеет выпуклость вниз. Наоборот, при разогреве газа по ходу фильтрации ($r < 0$, $n < 1$) кривая давления имеет выпуклость вверх. И только в случае $r = 0$ ($n = 1$) при изотермическом фильтрационном движении линия давления прямая. При $n \to \infty$ (капельная жидкость) $r \to 0$, и линия давления прямая при любых законах подвода или отвода теплоты.

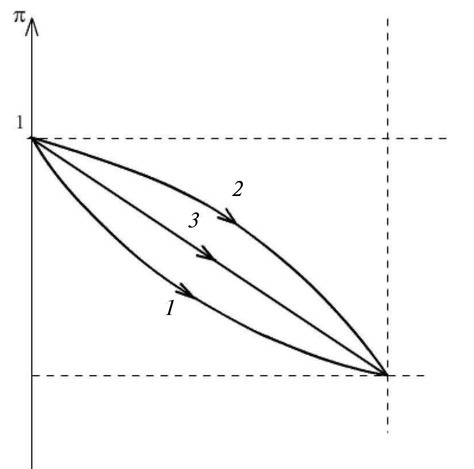

Рис. 1. Распределение безразмерного перепада давления π по ходу фильтрации для разных случаев:

1) охлаждения газа по ходу фильтрации ($r > 0$, $n > 1$);
2) нагревания газа по ходу фильтрации ($r < 0$, $n < 1$);
3) постоянной температуры по ходу фильтрации ($r = 0$, $n = 1$)

Эта теорема имеет простую физическую мотивировку. Пусть газ по ходу фильтрации охлаждается (либо пористое тело холоднее газового потока, либо подогрев газа компенсируется падением температуры за счет падения давления). Тогда средняя скорость фильтрации падает по ходу фильтрации, т. е. пористая среда ведет себя как диффузор. Если же газ подогревается пористой средой, то средняя скорость фильтрации растет по ходу фильтрации, и пористая среда ведет себя как конфузор.

В силу (1*д*) и (3)

$$\rho v = \frac{sp_0}{\nu_0}\frac{n}{n-1}\tau^{\frac{1}{n-1}-m}\frac{d\tau}{dx},$$

т. е. для постоянства массовой скорости необходимо, чтобы $\dfrac{d\tau^{\frac{n}{n-1}-m}}{dx} = \text{const}$.

Пусть $\tau(0) - 1 = \tau(\delta) - \tau_1 = 0$. Тогда распределение температуры по ходу фильтрации имеет вид

$$\tau = \left(1 - \left(1 - \tau_1^{\frac{n}{n-1}-m}\right)\frac{x}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{n+m-nm}}. \qquad (4a)$$

Теорема 2

При $n > 1$ (охлаждение газа по ходу фильтрации) кривая температуры имеет выпуклость вверх; наоборот, при $n < 1$ (нагревание газа за счет теплоотдачи с пористой средой) кривая температуры имеет выпуклость вниз. При $n \to \pm\infty$, кривая температуры всегда — и при подводе теплоты и при отводе теплоты — выпукла вниз.

Как и в теореме 1, физическая мотивировка теоремы 2 почти очевидна. Действительно, при охлаждении газа по ходу фильтрации средняя скорость фильтрационного потока падает. Чем меньше скорость фильтрации, тем длительнее контакт частицы газа с пористой средой и тем интенсивнее охлаждение газа. Нагревание газа в пористой среде равносильно охлаждению горячего газа при обратном направлении фильтрации — от сечения $X = 1$ к сечению $X = 0$.

На рис. 2, 3 представлены графики изменения давления и температуры, построенные в соответствии с решениями (4), (4*a*).

Вместо формулы Дюпюи (1) в качестве «потенциала фильтрации» предлагается использовать «работу проталкивания» dl_f, определяемую как $-dl_f = d\left(\frac{p}{\rho}\right)$, или, что удобнее, «обобщенную

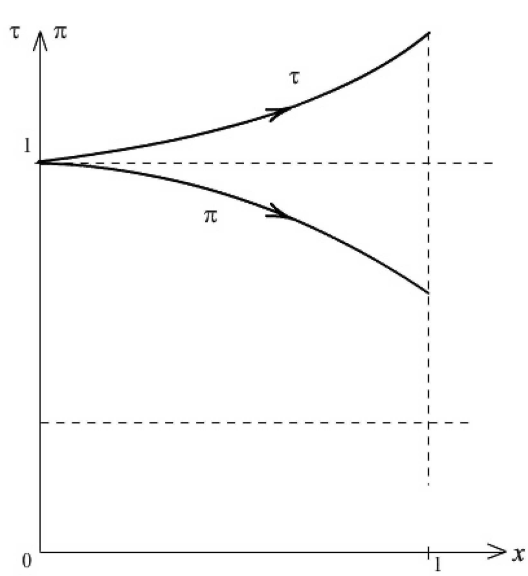

Рис. 2. Распределение безразмерных перепадов давления π и температурного напора τ по ходу фильтрации при нагревании газа по ходу фильтрации

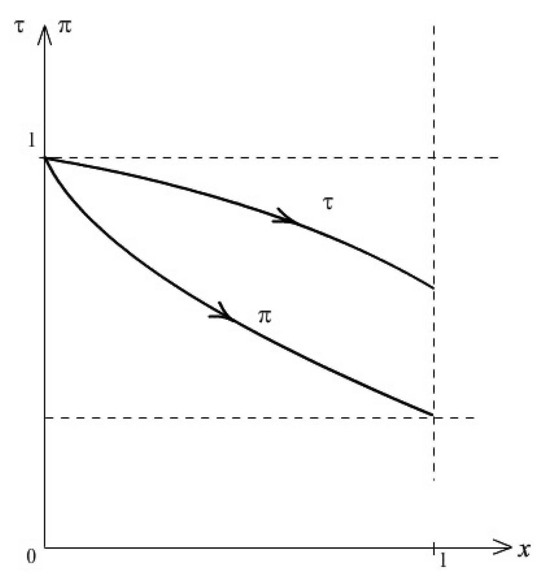

Рис. 3. Распределение безразмерных перепадов давления π и температурного напора τ по ходу фильтрации при охлаждении газа по ходу фильтрации

работу проталкивания» $-dl_{f,n} = \rho^{n-2} d\left(\dfrac{p}{\rho^{n-1}}\right)$. При $n = 1$ обобщенная работа проталкивания изотермического процесса совпадает с технической работой. Использование же работы проталкивания в «чистом виде» приводит в изотермическом движении к парадоксальному результату — $v = 0$, исключающему изотермическую фильтрацию. При $n = 2$ (интенсивное охлаждение) обобщенная работа проталкивания совпадает с работой проталкивания. При $n \to \pm\infty$ плотность ρ не зависит от давления. Тогда $dl_{f,\infty} = -\dfrac{dp}{\rho}$, а формула Дюпюи записывается, как для капельной жидкости.

Справедливы равенства, аналогичные равенствам ($1a$–∂):

$$v = -\frac{\kappa}{ng}\frac{p_0}{\rho_0}\pi^{-\frac{1}{n}}\frac{d\pi}{dx};$$

$$\rho v = -\frac{\kappa p_0}{ng}\frac{d\pi}{dx} \tag{5}$$

и

$$v = -\frac{\kappa}{g(n-1)}\frac{p_0}{\rho_0}\frac{d\tau}{dx};$$

$$\rho v = -\frac{\kappa p_0}{g(n-1)}\tau^{\frac{1}{n-1}}\frac{d\tau}{dx}. \tag{5a}$$

Средние скорости, подсчитанные по формулам (1) и (5) отличаются в n раз. Если n близко к 1, результаты совпадают. Теоремы 1 и 2, рассмотренные выше, сохраняют силу. Кроме того, вместо равенства (3) выполняется условие

$$\frac{\kappa}{ng} = \frac{s}{\nu}. \tag{3a}$$

Определение коэффициента фильтрации зависит от n и совпадает с (3) только при изотермическом течении. Получается, таким образом, что для неизотермического течения коэффициент фильтрации зависит от температуры (через коэффициент вязкости ν) и от внешнего теплообмена (через показатель политропы n). Для изотермического течения постоянство коэффициента проницаемости s влечет постоянство коэффициента фильтрации κ.

Такое положение парадоксально только на первый взгляд. Действительно:

1) коэффициент фильтрации определяется и задается с погрешностью в десятки процентов (в логарифмической шкале), поэтому введение показателя политропы n в определение коэффициента фильтрации мало что меняет;

2) коэффициент проницаемости определяется для изотермического фильтрационного движения, т. е. $n = 1$. Теплообмен с пористой средой зависит от ее плотности. Пористая среда может иметь плотный скелет (всюду плотное множество точек скелета) и «тощий» скелет (нигде не плотное множество точек скелета) [1]. Эффективное сечение плотного скелета мало, нигде не плотного скелета — велико. Реальные пористые среды образуют промежуточные фильтры. Получается так: если $\kappa = \text{const}$, то $sn = \text{const}$, т. е. чем меньше n (чем меньше потери давления в пористой среде), тем больше эффективное сечение (или коэффициент проницаемости). Для $n \gg 1$ (капельные жидкости) коэффициент проницаемости стабильно мал.

Дифференциальное уравнение энергии для фильтрационного движения имеет вид

$$\frac{\nu}{\sigma}\frac{d^2T}{dx^2} = v\frac{dT}{dx}, \tag{6}$$

где σ — число Прандтля.

Учитывая ($5a$), уравнение (6) можно записать так:

$$\frac{d^2\tau}{dX^2} + \frac{\sigma\kappa RT_0}{\nu g(n-1)}\left(\frac{d\tau}{dX}\right)^2 = 0;\quad X = \frac{x}{\delta} \in [0,\ 1]. \tag{7}$$

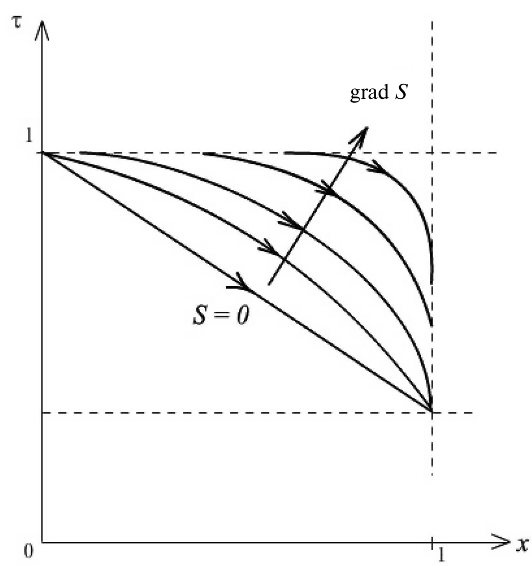

Рис. 4. Влияние фильтрационного числа Рэлея S на распределение перепада температуры τ по ходу фильтрации

Очевидно, что уравнение (7) уже учитывает теплообмен с твердым скелетом через показатель политропы n и коэффициент фильтрации κ. Уравнение (7) приводится в диссертации [2] для $n = 2$. Вместо τ использовалась переменная $\theta = \dfrac{1-\tau}{1-\tau_1} \in [0,\ 1]$, поэтому в левой части (7) изменен знак. Дробь $S = \dfrac{\sigma\kappa RT_0}{\nu g(n-1)}$ — некоторое число подобия фильтрационного переноса теплоты. Оно учитывает внешний теплообмен по периферии фильтрационного потока с пористой средой. Число S, очевидно, само зависит от τ через вязкость:

$$S = \frac{\sigma\kappa\tau^{-m} RT_0}{\nu_0 g(n-1)} = \frac{\sigma s RT_0 \tau^{-2m}}{\nu_0^2} \frac{n}{n-1}.$$

Это число аналогично числу подобия Рэлея в теории термо-гравитационной конвекции.

Предельные условия для (7): $\tau(0) - 1 = \tau(1) - \tau_1 = 0$. Решение уравнения (7), удовлетворяющее этим предельным условиям:

$$X = \frac{\int_{\tau}^{1} \exp\left(-\int_{\omega}^{1} S(\varphi)\, d\varphi\right) d\omega}{\int_{\tau_1}^{1} \exp\left(-\int_{\tau}^{1} S(\varphi)\, d\varphi\right) d\tau}, \qquad (8)$$

где ω, φ — переменные интегрирования.

Предельные случаи:

1. $S \to \pm 0$. Значит, в силу (8)

$$X = \frac{1-\tau}{1-\tau_1}. \qquad (8a)$$

Следовательно, если фильтрационное число Рэлея мало (например, интенсивный подогрев, соответственно $n \to +0$, либо $s \to +0$, то температура фильтрационного потока отслеживает температуру твердого скелета пористой среды: распределение температуры такое же, как и в твердом теле.

2. $S \to \pm\infty$. Эта ситуация реализуется при приближении течения к изотермическому ($n \to 1 \pm 0$) либо при движении сквозь «тощий» скелет пористого тела $(s \gg 1)$. Тогда уравнение (7) допускает решение: $\tau = 1$, $X \to [0,\ 1]$.

Действительно, в этом случае уравнение (7) регулярно возмущено и его решения обладают свойством $\tau(X) \underset{S\to\infty}{\to} \tau_\infty$, $\dfrac{d\tau_\infty}{dX} = 0$, причем сходимость последовательности возмущенных решений к τ_∞ равномерная по X (см. рис. 4).

Выводы

1. При отводе теплоты или при слабом подводе теплоты, недостаточном для увеличения температуры фильтрационного потока по ходу фильтрации в однородной изотропной пористой среде, кривая давления имеет выпуклость вниз. Наоборот, при разогреве газа по ходу фильтрации кривая давления имеет выпуклость вверх. И только при изотермическом фильтрационном движении линия давления прямая. Для капельной жидкости линия давления прямая при любых законах подвода или отвода теплоты.

2. При охлаждении газа по ходу фильтрации в однородной изотропной пористой среде кривая температуры имеет выпуклость вверх; наоборот, при нагревании газа за счет теплоотдачи с пористой средой кривая температуры имеет выпуклость вниз. Для несжимаемой (капельной) жидкости кривая температуры всегда выпукла вниз — и при подводе теплоты и при отводе теплоты.

3. В плотной пористой среде изменение температуры по ходу фильтрации отслеживает изменение температуры твердого скелета. В неплотной пористой среде изменение температуры по ходу фильтрации минимально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заманский, М.** Введение в современную алгебру и анализ [Текст] / М. Заманский / Пер. с франц.— М.: Наука, 1974.— С. 145–148.

2. **Петросова, Д.В.** Неизотермическая фильтрация воздуха через ограждающие конструкции замкнутых помещений [Текст]: Автореф. ... канд. техн. наук / Д.В. Петросова/ СПбГПУ.— 2012.— 21 с.

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович — *доктор технических наук, профессор кафедры гидравлики инженерно-строительного института Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия
(812)552-94-60
fonpetrich@mail.ru