УДК 621.001.5:331.01

А.Г. Ташевский

ВЕРИФИКАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A.G. Tashevsky

VERIFICATION TEST RESULTS OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS

В статье предлагается метод оценки числовых характеристик и параметров распределения наблюдаемых признаков по малому числу испытаний с целью подтверждения требований технического задания к показателям качества сложных изделий машиностроения.

АПРИОРНЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. МАЛОЕ ЧИСЛО ИСПЫТАНИЙ. ТРЕБОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА. СЛОЖНЫЕ ИЗДЕЛИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ.

In article are offered a numerical method of assessing the characteristics and parameters of the distribution of the observed evidences in a small number of tests to confirm the requirements of technical specifications for the quality of complex products engineering.

A PRIORI AND EXPERIMENTAL DATA. THE LAW OF DISTRIBUTION. RANDOM VARIABLE. A SMALL NUMBER OF TESTS. THE REQUIREMENTS OF TECHNICAL SPECIFICATIONS. QUALITY. COMPLEX PRODUCTS ENGINEERING.

Содержание проблемы

Сложность и высокая стоимость испытаний образцов новой техники (ОНТ) машиностроения (например, турбин) и энергетических комплексов, а также средств, обеспечивающих экспериментальную отработку объектов, сложность организационной структуры экспериментов, их малое количество и связанные с этим трудности перестройки экспериментов в процессе их реализации — все это делает необходимым широкое привлечение методов моделирования к натурным экспериментам и имеет цель получить результаты в ограниченное время из минимального объема экспериментальных данных. Установлено, что увеличение объема такого «сопровождающего моделирования» позволяет в 1,5–2 раза сократить число натурных экспериментов.

Обычно при моделировании сложных систем сталкиваются с ситуацией, когда исследуемые процессы в системе и условия внешней среды имеют вероятностный характер, а число факторов, действующих на оцениваемые показатели, — значительно, причем оценки искомых параметров нужно получить для широкого диапазона изменений параметров функционирования систем.

Используя обычные (классические) методы обработки результатов испытаний [1, 2] при их недостаточном количестве, можно получить оценки, но малой точности и надежности. Однако уже разработан ряд приемов и методов [3–5], позволяющих на основе имеющейся априорной информации о самых общих свойствах наблюдаемой случайной величины улучшить качество оценивания ее вероятностных характеристик при малом объеме выборки (числе испытаний).

Однородная выборка считается малой, если ее объем недостаточен для оценивания характеристики случайной величины с требуемой точностью и надежностью.

Объем испытаний, необходимый для подтверждения показателей надежности, сокращают разными путями: 1) форсированием режимов; 2) оценкой надежности по малому числу или отсутствию отказов; 3) сокращением числа образцов за счет увеличения длительности испытаний;

4) использованием разносторонней информации о надежности деталей и узлов машин.

Развивается подход к оцениванию по малому числу испытаний численных характеристик и параметров распределения наблюдаемых признаков с целью подтверждения требований, предъявленных в техническом задании к показателям качества. Он основан на использовании априорных и экспериментальных данных о законе распределения наблюдаемой случайной величины и учете вклада последних в информацию об истинном распределении случайной величины.

Приведем краткую формулировку общей задачи оценки качества образца новой техники.

Каждый испытываемый ОНТ обладает совокупностью (множеством) свойств, определяющих качество ОНТ применительно к его назначению. Каждое из свойств ОНТ может быть описано количественно с помощью некоторой переменной, значение которой и характеризует его качество относительно этого свойства. Эта переменная называется показателем свойства объекта. Качество объекта относительно его назначения характеризуется значениями совокупности показателей свойств, необходимых для достижения стоящей перед объектом задачи. Эта совокупность называется показателем качества ОНТ. Обобщенные абсолютные показатели свойств объекта, не зависящие (считающиеся таковыми) от условий, в которых он функционирует, используются при разработке его внутренней структуры и называются техническими показателями (техническими характеристиками — ТХ). Желаемое качество объекта задается условиями, которым должны удовлетворять значения показателей его качества. Эти условия называются критериями оценки качества объекта, а проверка их выполнимости — оцениванием качества объекта.

Набор показателей качества, подвергаемых оцениванию, содержится в технических требованиях (ТТ) и должен отражать лишь совокупность свойств объекта, существенных при оценивании степени его соответствия назначению и определяемых условиями его функционирования.

Множество критериев оценки качества объектов может быть разбито на три класса: критерии пригодности; критерии оптимальности; критерии превосходства.

Критерии оптимальности и превосходства представляют собой частные случаи критерия пригодности, по которому производится подтверждение технических требований к ОНТ посредством его испытаний.

Алгоритм подтверждения требований к ОНТ (оценивание показателей качества) по критерию пригодности включает следующие этапы:

определение (выявление) совокупности существенных свойств объекта;

определение значений показателей свойств и качества ОНТ;

установление связи между требованием и критерием, характеризующим исследуемое свойство или эффективность системы (выбор модельного распределения);

установление связи между оценками параметров требований и их истинными (заданными) значениями в зависимости от количества испытаний;

формирование (исходя из особенности модели и выбранных требований) статистики критерия, включая оценки параметров требований;

нахождение закона распределения статистики критерия в допускаемой (с определенным уровнем вероятности) области.

Наиболее характерными видами связи между ТТ и показателем эффективности системы являются нормальный закон распределения (НЗР), экспоненциальный закон распределения (ЭЗР) и гамма-распределения. Первому подчиняются характеристики точности, надежности, живучести; второму — характеристики безотказности и некоторые другие.

Следует подчеркнуть, что часто под оцениванием качества ОНТ понимают определение количественных характеристик качества, т. е. реализацию лишь первых двух этапов алгоритма. Такая схема проверки качества является разомкнутой, так как соответствующие ей этапы — подготовительные. Без реализации остальных этапов оценка качества ОНТ невозможна в принципе, ибо бессмысленно говорить о качестве, не предъявив к нему требований.

Методология решения задачи и основные расчетные зависимости

Общую методологию решения задачи подтверждения требования к качеству сложной технической системы рассмотрим на примере, в котором механизм формирования отклонений описывается НЗР.

Пусть $T_{\text{тр}}$ — заданное требование к качеству ОНТ, $\tilde{m}_t$ — его математическое ожидание, σ_t — среднее квадратическое отклонение (СКО), $\hat{m}$ — оценка, S_t — выборочное СКО.

Пусть заданный уровень критерия ОНТ зависит от характеристики и определяется следующим образом:

$$P_0 = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{T_{\text{тр}}} e^{-\frac{(t-\tilde{m}_t)^2}{2\sigma_t^2}} dt. \quad (1)$$

С точки зрения задания требований условие (1) может быть представлено в виде

$$T_{\text{тр}} \geq \tilde{m}_t + \sigma_t u_{p_0}, \quad (2)$$

где $T_{\text{тр}}$ — заданный уровень требования к качеству ОНТ; u_{p_0} — квантиль стандартного НЗР, соответствующий заданному уровню критерия качества P_0.

Если в результате проведения n испытаний получена оценка параметра $T_{\text{тр}}(\hat{m}_t)$ и ее выборочное СКО (S_t), то для выборки из нормальной совокупности справедливы следующие соотношения, характеризующие связь оценки МО и выборочного СКО с числом проведенных испытаний:

$$\hat{m}_t = \tilde{m}_t + \sigma_t \frac{\eta}{\sqrt{n}}; \quad (3)$$

$$S_t = \sigma_t \frac{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

где η — случайная величина, распределенная по стандартному НЗР — $N(0, 1)$; χ^2_{n-1} — случайная величина, распределенная по закону χ^2 с n–1 степенями свободы.

Тогда с учетом соотношений (3) и (4) условие (2) может быть представлено в общем случае так:

$$T_{\text{тр}} \geq \hat{m}_t - \frac{S_t\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}\frac{\eta}{\sqrt{n}} + \frac{S_t\sqrt{n}u_{p_0}}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}},$$

или

$$T_{\text{тр}} \geq \hat{m}_t + \frac{S_t\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}\left(u_{p_o} - \frac{\eta}{\sqrt{n}}\right). \quad (5)$$

Для формирования статистики критерия представляется целесообразным в зависимости (5) выделить заданные и получаемые в результате испытаний характеристики.

После проведения простых преобразований получаем соотношение

$$\frac{T_{\text{тр}} - \hat{m}_t}{S_t u_{p_0}\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}} - \frac{1}{u_{p_0}\sqrt{n(n-1)}} t_{n-1}. \quad (6)$$

Для вывода условия (6) использовалось известное в математической статистике соотношение [7]

$$\frac{\eta}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}} \sim \frac{t_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \quad (7)$$

(отношение $\frac{\eta\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}$ распределено по закону Стьюдента с n–1 степенями свободы). Таким образом, статистика критерия $\frac{T^{TP} - \hat{m}_t}{S_t u_{p_0}\sqrt{n}}$ распределена по закону, получаемому в результате композиции двух случайных величин: $\frac{1}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}$ и $\frac{t_{n-1}}{u_{p_0}\sqrt{n(n-1)}}$.

Введем обозначение статистики критерия:

$$\tau = \frac{T_{\text{тр}} - \hat{m}_t}{S_t u_{p_0}\sqrt{n}}. \quad (8)$$

Статистика критерия τ распределена по закону (доказательство теоремы приведено в [4]), плотность распределения которого имеет следующий вид:

$$f(\tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}}{2^{\frac{n-2}{2}\cdots}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}\frac{(n-3)!!}{\left[1+u_{p_0}^2 n\tau^2\right]^{\frac{n}{2}}} +$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^\infty \xi^{-n} e^{-\frac{1}{2\xi^2}}\left[1+u_{p_0}^2 n(\xi-\tau)^2\right]^{-\frac{n}{2}} d\xi \quad (9)$$

при четном n;

$$f(\tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2\left[1+u_{p_0}^2 n\tau^2\right]^{\frac{n}{2}}} +$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^\infty \xi^{-n}e^{-\frac{1}{2\xi^2}}\left[1+u_{p_0}^2 n(\xi-\tau)^2\right]^{-\frac{n}{2}}d\xi \qquad (10)$$

при нечетном n.

Чтобы проверить гипотезу о принадлежности расчетного значения критерия τ критической или допустимой области, необходимо произвести расчет значений функции распределения статистики критерия τ:

$$F(\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}(n-3)!!}{2^{\frac{n-3}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}a^n\times$$

$$\times\left[\frac{\tau_p}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(2N-1)(2N-3)...(2N-2k+1)}{2^k(N-1)(N-2)...(N-k)a^{2k}\left(\tau_p^2+a^2\right)^{n-k}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2N-3)!}{2^{n-1}(N-1)!a^{2N-1}}\operatorname{arctg}\frac{\tau_p}{a}\right]+$$

$$+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_o}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^{\tau_p}\int_0^\infty \xi^{-n}e^{-\frac{1}{2\xi^2}}\left[1+u_{p_0}^2 n(\xi-\tau)^2\right]^{-\frac{n}{2}}d\xi d\tau \qquad (11)$$

для четного n, $N=\frac{n}{2}$, $a=\frac{1}{u_{p_0}\sqrt{n}}$;

$$F(\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_0}\sqrt{n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}a^n\times$$

$$\times\left\{\frac{\tau_p\left(\tau_p^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2N1-1)a^2}\left[\frac{1}{\left(\tau_p^2+a^2\right)^{N1}}+\right.\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{N1-1}\frac{2^k(N1-1)(N1-2)...(N1-k)}{(2N1-3)(2N1-5)...(2N1-2k-1)}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{1}{a^{2k}\left(\tau^2+a^2\right)^{N1-k}}\right]\right\}+\frac{2^{\frac{3-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)u_{p_o}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^{\tau_p}\int_0^\infty \xi^{-n}e^{-\frac{1}{2\xi^2}}\left[1+u_{p_0}^2 n(\xi-\tau)^2\right]^{-\frac{n}{2}}d\xi d\tau \qquad (12)$$

для нечетного n, $N1=\frac{n-1}{2}$, $a=\frac{1}{u_{p_0}\sqrt{n}}$.

Таким образом, для подтверждения требований по малому числу испытаний достаточно рассчитать $\hat{m}_t$, S_t.

В табл. 1–4 из [6] представлены значения функции распределения $F(\tau)$ статистики критерия τ и ее плотности $f(\tau)$ для целочисленных параметров n.

По уровню квантиля P_0 и α определяется значение $\tau_{\text{кр}}\left(\alpha, n, u_{p_0}\right)$ по табл. 2 из [6], а затем решается неравенство

$$\hat{m}\geq T_{\text{тр}}+S_t u_{p_0}\sqrt{n}\,\tau_{\text{кр}}\left(\alpha, n, u_{p_o}\right). \qquad (13)$$

Выражение (13) получено из (6) и показывает, что если оценка математического ожидания, когда n мало, будет больше заданного требования к технической системе, увеличенного на комплекс, характеризующий степень доверия (риска) и малую выборку, то требование считается подтвержденным. Это обстоятельство наглядно иллюстрирует рис. 1.

В табл. 3, 4 из [6] приведены значения плотности $\varphi(\tau)$ и функции распределения статистики критерия τ для частного случая, когда математическое ожидание НЗР известно.

Входами в табл. 2 и 4 работы [6] являются: число испытаний (объем выборки) n, квантиль стандартного НЗР, соответствующий уровню критерия P_0, и значение уровня подтверждения α. Расчеты проводились численными методами.

Пример решения задачи

Рассмотрим пример решения задачи по определению числа испытаний, подтверждающих надежность изделия. Необходимо по трем испытаниям (n = 3) сделать вывод о выполнимости требований по безотказности сложной технической системы при уровне значимости α = 1. Задана вероятность безотказного функци-

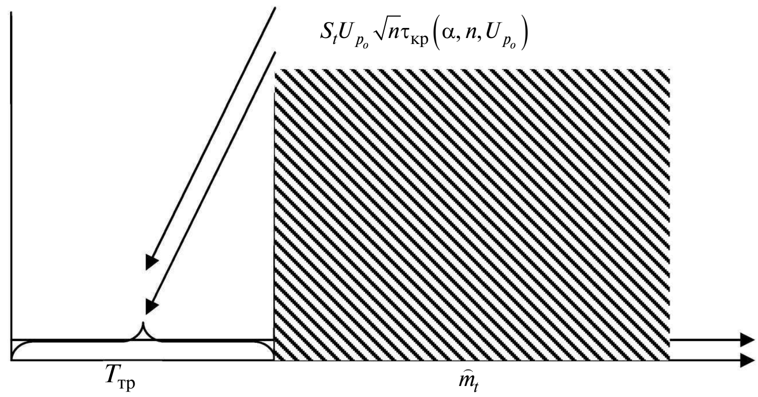

Рис. 1. Подтверждение требования $T_{тр}$, когда n мало.

онирования системы $P_0 = 0{,}9$ на периоде времени $T_{тр} = 22\cdot10^3$ ч. Закон распределения времени безотказной работы — нормальный, параметры закона неизвестны. В результате испытаний получено время работы системы до первого отказа $T_1 = 28{,}5\cdot10^3$ ч; $T_2 = 30\cdot10^3$ ч; $T_3 = 27\cdot10^3$ ч.

Решение. Находим оценку математического ожидания и выборочного СКО времени наработки до отказа:

$$\widehat{m}_t = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{n} = \frac{28{,}5 + 30 + 27}{3} 10^3 \text{ ч};$$

$$S_t = \sqrt{\frac{\left(\widehat{m}_t - T_1\right) + \left(\widehat{m}_t - T_2\right) + \left(\widehat{m}_t - T_3\right)^2}{n-1}} =$$

$$= 1{,}5\cdot10^3 \text{ ч};$$

по табл. 2 определяется $\tau_{кр}\left(\alpha, n, u_{p_0}\right)$ — $\tau_{кр}$ = = 1,57576.

По неравенству (13) $\widehat{m}_t \geq T_{тр} + S_t u_{p_0} \sqrt{n}\tau_{кр}\left(\alpha, n, u_{p_o}\right)$ проверяется выполнимость требования к $T_{тр}$: $28{,}5 \geq 22 + 1{,}5 \times 1{,}28155\sqrt{3\cdot1{,}57576} = 27{,}24659$.

Следовательно, проведенные испытания подтверждают заданное требование.

Частным случаем решения задачи подтверждения требований к качеству сложной технической системы является случай, когда механизм формирования отклонений истинных значений требований от реальных аппроксимируется *нормальным законом*, математическое ожидание $\widehat{m}_t$ которого известно. В этом случае условие (2) может быть представлено в виде

$$T_{тр} \geq \tilde{m}_t + \frac{S_t\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}. \qquad (14)$$

После проведения преобразований получаем соотношение

$$\frac{T_{тр} - \tilde{m}_t}{S_t u_{p_0}\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\chi^2_{n-1}}}. \qquad (15)$$

Для вывода условия (15) использовалось известное в математической статистике соотношение (4).

Таким образом, комплекс случайных величин в левой части этого выражения распределен по закону χ^2 с n–1 степенями свободы.

Введем обозначение статистики критерия: $\tau = \dfrac{T_{тр} - \tilde{m}_t}{S_t u_{p_0}\sqrt{n}}$.

Статистика критерия τ распределена по закону (доказательство теоремы приведено в [4]), плотность которого

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\tau^{-n} e^{-\frac{1}{2\tau^2}}. \qquad (16)$$

Расчет значений функции распределения статистики критерия проводился по выражению

$$\Phi(\tau) = \tau_{кр\,\alpha} = \int_0^{\tau} \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\tau^{-n} e^{-\frac{1}{2\tau^2}} d\tau.$$

Результаты расчетов плотности $\varphi(\tau)$ и функции распределения $\Phi(\tau)$ приведены в табл. 3, 4 из [6].

Задачи подтверждения требований к качеству сложной технической системы, когда механизм формирования отклонений истинных значений требования от реальных проявляется в виде *экспоненциального закона* распределения, решается следующим образом. Пусть $T_{\text{тр}}$ — заданное требование к качеству ОНТ. В результате испытаний получены частные значения требования $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Если они будут распределены по экспоненциальному закону, плотность которого

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{17}$$

где $\lambda = \frac{1}{\tilde{m}_t}$ ($\tilde{m}_t$ — математическое ожидание), для которого характеристическая функция имеет вид

$$\theta_1(V) = \frac{1}{1 - iV\,\tilde{m}_t}, \tag{18}$$

то сумма экспериментальных значений $\sum_{i=1}^{n} t_i$ распределена по закону, характеристическая функция которого представляет собой n произведений характеристической функции (18):

$$\theta_2(V) = \frac{1}{\left(1 - iV\,\tilde{m}_t\right)^n}. \tag{19}$$

Математическое ожидание связано с задаваемым уровнем P_0 и $T_{\text{тр}}$ соотношением

$$P_0 = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{20}$$

откуда

$$\tilde{m}_t = \frac{T}{\ln\frac{1}{1-P_0}}. \tag{21}$$

Известно свойство характеристической функцией: если $\theta(V)$ — характеристическая функция распределения $F(t)$, то характеристической функцией для $F\left(\frac{t}{a}\right)$ является $\theta(aV)$. В силу этого можно подобрать такой коэффициент a, чтобы характеристическая функция получаемого комплекса (статистика) была инвентарной относительно неизвестных данных $\tilde{m}_t$ или задаваемых характеристик P_0 и $T_{\text{тр}}$.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемой задаче таким коэффициентом является

$$a = \frac{1}{T_{\text{тр}}} \ln\frac{1}{1-P_0}. \tag{22}$$

Тогда статистика

$$\tau = \frac{\sum_{t=1}^{n} t_i T_{\text{тр}}}{\ln\frac{1}{1-P_0}} = \frac{\tilde{m}_t}{T_{\text{тр}}} \ln\frac{1}{\left(1-P_0\right)^n} \tag{23}$$

распределена по закону, характеристическая функция которого имеет вид

$$\theta_3(V) = \frac{1}{\left(1 - iV\right)^n}. \tag{24}$$

Данной характеристической функции соответствует гамма-распределение

$$f(\tau) = \frac{\tau^{n-1} e^{-\tau}}{\Gamma(n)}. \tag{25}$$

При больших значениях n закон распределения статистики τ будет нормальным.

Заданные требования будут выполняться при уровне значимости α, если выполняется условие $\tau_{\text{расч}} > \tau_{\text{кр}\,\alpha}$, т. е.

$$\frac{\hat{m}_t}{T_{\text{тр}}} \ln\frac{1}{\sqrt[n]{1-P_0}} > \tau_{\text{кр}\,\alpha}, \tag{26}$$

или

$$P_{\text{кр}\,\alpha} = \int_0^{\tau_{\text{расч}}} \frac{1}{\Gamma(n)} \tau^{n-1} e^{-\tau} d\tau. \tag{27}$$

Для решения задачи подтверждения требования вводим в рассмотрение статистику критерия:

$$\tau = \frac{\hat{m}_t}{T_{\text{тр}}} \ln\frac{1}{\left(1-P_0\right)^n}. \tag{28}$$

Она распределена по закону гамма-распределения с плотностью

$$f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n)} \tau^{n-1} e^{-\tau}. \tag{29}$$

Задача сводится к проверке гипотезы о принадлежности расчетного значения критерия τ критической (допустимой) области (рис. 2).

Используя результаты работы [3], можно показать, что критическая область для статистики τ будет определяться зависимостью

$$\tau_{\text{кр}\,\alpha} = \\ = \sum_{\nu=0}^{\nu^*} \frac{\left(\alpha - F_0\right)^\nu}{\nu!} \times \\ \times \left[\left[\Gamma(n)\right]^\nu (n-1)^{1-\nu n} e^{\nu(n-1)} \psi_{\nu+1}(\tau)\right]_{\tau_0 = n-1} +$$

$$+\frac{\left(\alpha-F_0\right)^{\nu^*+1}\left(n-1\right)^{1-\nu^* n}e^{\left(\nu^*+1\right)\left(n-1\right)}\left[\Gamma\left(n\right)\right]^{\nu^*+1}}{\left(\nu^*+1\right)!\left[1-\dfrac{\Gamma\left(n\right)}{\left(n-1\right)^n e^{n-1}\left(\alpha-F_0\right)}\right]}, \quad (30)$$

где $F_0=\int\limits_0^{n-1}\frac{1}{\Gamma(n)}\tau^{n-1}e^{-\tau}\alpha\tau$;

$$\psi_{\nu+1}(\tau)=\tau\dot{\psi}_\nu(\tau)+(1-\nu\, n+\nu\,\tau)\psi_\nu(\tau);$$

$$\psi(\tau)=1. \quad (31)$$

Пример. Известно, что закон изменения времени безотказной работы технической системы — экспоненциальный, наработка на отказ $\tilde{m}_t$ = =1100 ч. Задано, что на периоде времени $T_{тр}$ = 1800 ч вероятность безотказной работы должна быть P_0 = 0,8. В результате проведенных испытаний (n = 3) получена оценка среднего времени безотказной работы технической системы $\hat{m}_t$ = 2800 ч.

Необходимо сделать вывод о выполнимости задаваемых требований по безотказности системы.

Решение. 1. По зависимости (28) определяется расчетное значение критерия

$$\tau_{расч}=\frac{2850}{1800}\ln\frac{1}{(1-0{,}8)^3}=7{,}64.$$

Используя зависимости (30), (31), производим расчет критического значения критерия

$$F_0=\int\limits_0^2\frac{1}{\Gamma(3)}\tau^2e^{-\tau}d\tau.$$

Данный интеграл при n = 3 может быть определен в результате последовательного интегрирования по частям. Численные значения его приведены в таблицах [8]. Тогда F_0 = 1 – P(4,6)= = 0,32332; $\alpha-F_0$ = –0,27332.

Фиксируем $\nu=6$, так как из опыта расчета подобных рядов известно, что члены искомого ряда более высокого порядка вносят малую погрешность вычисления.

Рассчитываем значения функции $\psi_\nu(\tau)$ для ν = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Получаем ψ_0 = 1, ψ_1 = 1, ψ_2 = 0, ψ_3 = 2, ψ_4 = –4, ψ_5 = 40, ψ_6 = –264.

Производим расчет $\tau_{кр\,\alpha}$ по выражению (30):

$$\tau_{кр\,\alpha} = 2–1{,}01 + 0 – 0{,}086 – 0{,}022 –$$
$$– 0{,}012–0{,}0000022 = 0{,}848.$$

Таким образом $\tau_{расч}>\tau_{кр\,\alpha}$ при данном уровне значимости (α = 0,05). Выдвинутые требования выполняются.

Решим задачу иначе. При второй постановке данной задачи достаточно рассчитать $P_{кр}$ по зависимости (27) с помощью таблиц математической статистики [8]:

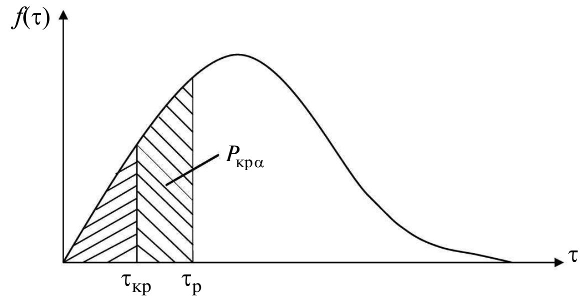

Рис. 2. Функция распределения статистики критерия τ. Проверка гипотезы

$$P_{кр}=\int\limits_0^{7{,}64}\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau}d\tau=1-P(1{,}7;6)=0{,}055.$$

Для случая, когда закон изменения требования к показателю качества описывается гамма-распределением, плотность которого имеет вид

$$f(t)=(\lambda t)^{m-1}e^{-\lambda t}\lambda\frac{1}{\Gamma(m)}, \quad (32)$$

вывод аналитической зависимости для расчета критической области производится аналогично, по ранее описанной схеме:

$$\tau_{кр\,\alpha}=n\frac{\hat{m}_t}{T_{m-1}}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left[P_0-F_0\right]^\nu}{\nu!}\Gamma(m)(m-1)^{1-\nu m}e^{\nu(m-1)}\psi_1(t)\Big|_{t=m-1}, \quad (33)$$

где $F_0=\int\limits_0^{m-1}\frac{1}{\Gamma(m)}t^{m-1}e^{-t}dt$;

$$\psi_{\nu+1}(t)=t\dot{\psi}_\nu(t)+(1-\nu\, n+\nu\, t)\psi_\nu(t);\;\; \psi_1(t)=1.$$

Плотность распределения статистики критерия $f(\tau)$ имеет вид

$$f(\tau)=\frac{1}{\Gamma(mn)}\tau^{(mn-1)}e^{-\tau}. \quad (34)$$

В настоящей работе предложен метод, основанный на использовании априорных и экспериментальных данных о законе распределения наблюдаемой случайной величины и учете вклада последних в информацию об истинном распределении случайной величины.

Это позволяет оценивать числовые характеристики и параметры распределения наблюдаемых признаков по малому числу испытаний и использовать это для подтверждения требований технического задания к показателям качества сложных изделий машиностроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баклашов, Н.И.** Научный эксперимент [Текст] / Н.И. Баклашов, А.Н. Белюнов [и др.].— М: Радио и связь, 1982.— 304 с.

2. **Вентцель, Е.С.** Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель.— М.: Физматгиз, 1962.— 564 с.

3. **Мартыщенко, Л.А.** Методы военно-научных исследований в задачах разработки и испытания вооружения: Ч. 1 [Текст] / Л.А. Мартыщенко, В.В. Панов / МО СССР.— М.: Наука, 1983.— 415 с.

4. **Мартыщенко, Л.А.** Подтверждение ТТХ сложных систем по малому числу испытаний [Текст] / Л.А. Мартыщенко, А.Г. Ташевский, В.И. Немчинов // МО СССР.— 1985.— 48 с.

5. **Мартыщенко, Л.А.** Проблема Беренса — Фишера и ее приложение к сравнению результатов статистического моделирования и натурных испытаний сложных систем [Текст] / Л.А. Мартыщенко / МО СССР.— 1983.— 15 с.

6. **Ташевский, А.Г.** Метод оценки надежности сложных изделий энергомашиностроения при ограниченном числе испытаний [Текст] / А.Г. Ташевский // Труды Санкт-Петербургского института машиностроения. Вып. 2. – СПб.,1996. – 96с.

7. **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное интегральное исчисление [Текст] / Н.С. Пискунов.— М.: Физматгиз, 1960.— 747 с.

8. **Большев, Л.Н.** Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов.— М.: Наука, 1983.— 415 с.

9. **Ташевский, А.Г.** Интерпретация результатов испытаний после модернизации систем энергомашиностроения [Текст] / А.Г. Ташевский // Инструмент и технологии.— 2012. № 36.— С. 34–39.

ТАШЕВСКИЙ Арнольд Германович — *доктор технических наук, профессор института машиностроения (ЛМЗ-ВТУЗ) Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации.*
195197, Полюстровский пр., д. 14, Санкт-Петербург, Россия
taarnold@yandex.ru