

УДК 621.372.001

*М.А. Шакиров, В.Н. Боронин, А.Н. Модулина*

## **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНИЯХ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ**

*M.A. Shakirov, V.N. Boronin, A.N. Modulina*

## **THE ANALYTICAL METHOD FOR THE ANALYSIS OF DYNAMIC PROCESSES IN POWER TRANSMISSION LINES BASED ON THE METHOD OF STATE VARIABLES**

Разработана единая расчетная схемная модель для анализа переходных процессов в однородных линиях с распределенными параметрами. Предложена аналитическая форма представления этих процессов, основанная на методе переменных состояния. Метод применим для исследования динамических процессов в системах, состоящих из нескольких линий при любой сложности устройств на их стыках и в нагрузках.

ЛИНИЯ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ. ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ.

Developed a unified computational circuit model for transient analysis of homogeneous lines with distributed parameters. The technique of the study of these processes on the basis of the state variables using the matrix exponential. The method is applicable to studies of dynamic processes in systems consisting of several lines with any of devices on their joints and loads.

POWER TRANSMISSION LINES. STATE VARIABLES. EQUIVALENT CIRCUITS. THE ELECTRICAL CIRCUIT. TRANSIENTS.

При любых включениях или переключениях в высоковольтных линиях и линиях связи возникают волновые процессы. Появляющиеся при этом перенапряжения и большие токи могут привести к повреждению изоляции или других частей электротехнических установок, что должно быть предусмотрено при их проектировании. Этим вопросам посвящены отдельные главы учебников по ТОЭ и теории цепей, авторы которых из-за сложности процессов ограничиваются анализом случаев, когда электротехнические установки на стыке линий или на их оконечных зажимах представляют собой устройства первого порядка сложности, т. е. их математические модели — дифференциальные уравнения первого порядка [1]. Благодаря этому волновые процессы в линиях можно описать достаточно простыми аналитическими соотношениями, что, безусловно, важно на начальных стадиях знакомства с переходными про-

цессами в однородных линиях. Однако на практике приходится иметь дело с установками 2-го, 3-го и большего порядка сложности, что усложняет и аналитические соотношения. По существу, труд, затраченный на их получение, становится бессмысленным из-за низкого уровня обобщимости этих соотношений при выполнении многовариантного анализа волновых процессов в линии, когда главенствующее значение приобретает анализ форм самих временных и пространственных зависимостей тех или иных переменных (а не способ их получения), их изменение в различных вариантах, исследование чувствительности, оптимизация и т. д. В этих случаях нужны универсальные программы, которые можно было бы использовать для различных задач при изменениях параметров линий, стыковых устройств, нагрузки и т. д.

Этой цели посвящена настоящая работа, причем задача создания универсальной программы

решается на основе метода переменных состояний для обобщенной расчетной схемы замещения линии, предложенной М.А.Шакировым в [2]. Особенность схемы состоит в том, что с ее помощью одновременно определяются токи и напряжения как на стыке, так и в нагрузке, относящиеся к разным отсчетам времени, связанным с конечными скоростями движения волн вдоль линий. Методика построения обобщенных схем и специфика их анализа иллюстрируется на конкретных примерах. Первый из них имеет также аналитические решения, приведенные в [2], что в конечном итоге позволяет оценить достоверность предлагаемого подхода. Достоинства методики демонстрируются на примерах высокого порядка сложности, решение которых обычными аналитическими методами затруднительно.

**Обобщенная расчетная схемная модель линии передачи.** Типовая структура системы линий, рассматриваемых в работе, представлена на рис. 1. Две однородные линии без потерь длиной  $l_1$  и  $l_2$  включаются со стороны зажимов  $I-I'$  под действие постоянного напряжения  $U_0$ . На стыке линий включен  $2 \times 2$ -полюсник, а на оконечных зажимах второй линии — нагрузка (приемник) в виде двухполюсника. Для простоты, как обычно, рассматриваются однородные линии без потерь с заданными значениями

волновых сопротивлений и скоростей распространения волн, причем принято  $l_1 \geq 2l_2$ . Волновые сопротивления линий равны соответственно  $z_1$  и  $z_2$ .

Требуется построить графики распределения напряжений и токов вдоль линий в момент времени, когда *отразившаяся* от конечных зажимов второй линии волна пройдет часть  $\Delta l_2$  ее длины, то есть

$$\Delta l_2 = \alpha l_2, \text{ где } \alpha < 1. \quad (1)$$

Как известно, при решении этой задачи используют две расчетные схемы: одну — для определения законов изменения напряжений и токов в функции времени в *месте стыка* линий (рис. 2, а); вторую — в *месте приемника* (рис. 2, б). Смысл обозначений на рис. 2 пояснен в [2]. Каждая из схем рассчитывается отдельно одна от другой. Чтобы избежать трудностей, связанных с определением величины  $2u_{\phi n}$  и последующим перенесением ее во вторую расчетную схему с приемником, т. е. в схему на рис. 2, б, предлагается построить *единую расчетную схемную модель* с ИНУН (рис. 3), в которой эта величина переносится автоматически.

Рассматриваемый подход имеет ряд особенностей. В отличие от прежнего подхода (см. рис. 2), схема на рис. 3 рассчитывается как единое целое, что позволяет одновременно определять

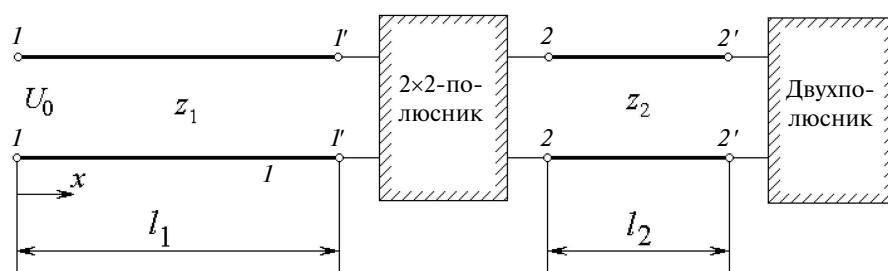


Рис. 1. Типовая структура цепи с двумя однородными линиями

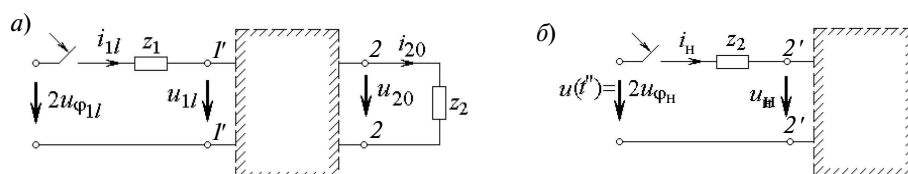


Рис. 2. Расчетные схемные модели для определения напряжений и токов на стыке линий ( $u_{1l}, i_{1l}$ ), ( $u_{20}, i_{20}$ ) и на зажимах приемника ( $u_H, i_H$ )

переходные процессы на оконечных зажимах обеих линий (относящиеся к разным моментам времени!). С этим связано еще одно достоинство — возможность и простота применения метода переменных состояния для расчета величин  $u_{1l}$ ,  $u_{20}$  на стыке линий и  $u_n$  на оконечных зажимах второй линии, что необходимо для дальнейшего построения волновых процессов вдоль линий. При этом порядок сложности стыка и приемника не играет роли. Требуется лишь умение корректно составить уравнения состояния схемы (см. рис. 3) в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu_{\varphi}(t) \quad (2)$$

с учетом инерционных элементов стыка и приемника, что является типовой задачей теории цепей. В соответствии с условием задачи следует принять начальное значение

$$x_0 \equiv x(0) = 0. \quad (3)$$

Следующая особенность — дискретная форма представления решения, поскольку каждая из входящих в вектор  $x(t)$  переменных состояния, например  $u_{C_p}(t)$  для емкости  $C_p$  или  $i_{L_q}(t)$  для индуктивности  $L_q$ , будут представлены числовыми последовательностями  $u_{C_p}[k]$  и  $i_{L_q}[k]$  с шагом дискретизации

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}, \quad (4)$$

где  $\Delta x$  — шаг построения (то есть шаг печати) пространственных кривых распределения напряжения и тока вдоль линий, принимаемый, например, равным

$$\Delta x = 0,001l_2. \quad (5)$$

В целом решение  $x(t)$  представляется цифровой последовательностью  $x(t_k) = x[k]$ . Дискретизация  $x[k]$  достигается благодаря представлению решения (2) через матричный экспоненциал [2]

$$x[k] = x''[k] + x'[k] = e^{At_k} (x_0 - x'(0)) + x'(t_k), \quad (6)$$

где  $x''$  — преходящая, а  $x'$  — установившаяся составляющие решения.

Искомым является столбец выходных алгебраических переменных  $y[k] = [u_{1l}[k], u_{20}[k], u_n[k]]^T$ , для которых необходимо составить уравнения реакции также в стандартной форме

$$y[k] = Cx[k] + Du_{\varphi}[k]. \quad (7)$$

Таким образом, пользователю программы, адаптированной к структуре системы (см. рис. 1), достаточно задать лишь матрицы **A**, **B**, **C** и **D**, которые он должен получить самостоятельно для конкретной цепи. Соответствующая программа, разработанная М.А. Шакировым, под названием **Tema\_12\_2.m** подготовлена к внедрению в учебный процесс студентов 2-го курса, изучающих данный раздел ТОЭ. Программа содержит два этапа. На первом этапе строятся кривые переходного процесса для переменных  $u_{1l}[k]$ ,  $u_{20}[k]$ ,  $u_n[k]$  по обобщенной схеме (см. рис. 3) на интервале от  $t = 0$  до момента  $t$ , равного

$$T_0 = \frac{l_2}{v} + \frac{\Delta l_2}{v} = \frac{l_2}{v} + \frac{\alpha l_2}{v}, \quad (8)$$

при этом для всех кривых  $k$  изменяется в пределах

$$1 \leq k \leq \frac{T_0}{\Delta t} = \frac{(1+\alpha)l_2}{v\Delta x/v} = (1+\alpha) \frac{l_2}{\Delta x}. \quad (9)$$

На втором этапе производится выборка отдельных участков из полученных кривых (цифровые последовательности) для построения распределения волн напряжения и тока в линиях в заданный момент времени с шагом  $\Delta x$ . Для первой линии значения  $k$  определяются соотношением (9). Для падающей волны во второй линии значения  $k$  лежат в пределах  $1 \leq k \leq l_2 / \Delta x$ , а для отраженной — в пределах  $1 \leq k \leq \alpha l_2 / \Delta x$ .

**Пример 1.** Для демонстрации методики полезно в начале рассмотреть известный пример (рис. 4), имеющий аналитическое решение, для

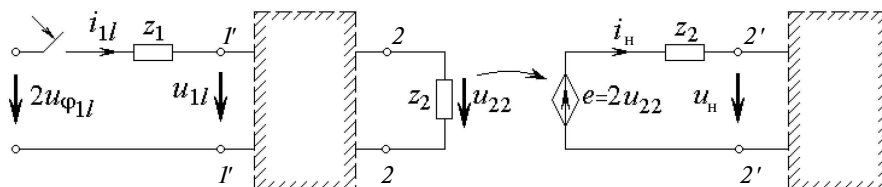


Рис. 3. Расчетная обобщенная (единая) схемная модель для решения задачи, соответствующая рис. 2

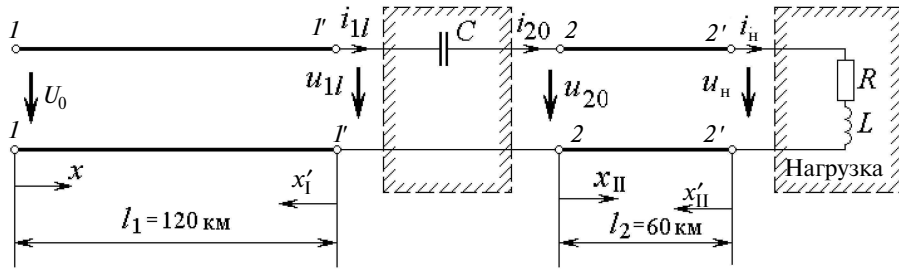


Рис. 4. Пример цепи, имеющий аналитическое решение в [2, стр. 127–137]

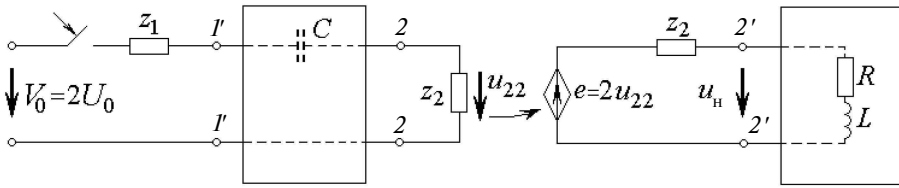


Рис. 5. Расчетная обобщенная (единая) схемная модель для цепи, изображенной на рис. 4

случая, когда на стыке линий без потерь включена продольная емкость  $C = 0,125$  мкФ, а на окончных зажимах второй линии включен  $R, L$ -приемник при  $R = 400$  Ом и  $L = 40$  мГн [2]. Линии включаются под напряжение  $U_0 = 120$  кВ. Обе линии характеризуются одинаковым волновым сопротивлением  $z = 400$  Ом. Скорость распространения волн в линиях одинакова и равна  $v = 3 \cdot 10^5$  км/с.

Как и в [2], примем  $\alpha = 0,5$ . Тогда согласно (2) интервал времени с момента прихода волны к стыку до момента времени, когда отраженная от окончных зажимов 2-й линии волна пройдет расстояние  $\alpha l_2 = 0,5 l_2 = 30$  км, будет равен

$$T_0 = \frac{l_2}{v} + \frac{\alpha l_2}{v} = \frac{60}{3 \cdot 10^5} + \frac{0,5 \cdot 60}{3 \cdot 10^5} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Воспользовавшись (5) и (4), примем

$$\Delta x = 0,001 \cdot l_2 = 0,001 \cdot 60 = 0,06 \text{ км;}$$

$$\Delta t = \Delta x / v = 0,06 / (3 \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

Обобщенная схемная модель цепи представлена на рис. 5. Далее решение разобьем на этапы.

**Этап 1.** Построение уравнения состояния обобщенной схемы (см. рис. 5):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(z_1 + z_2)C} & 0 \\ -\frac{2z_2}{(z_1 + z_2)L} & -\frac{1}{L/(R + z_2)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(z_1 + z_2)C} \\ \frac{2z_2}{(z_1 + z_2)L} \end{bmatrix} V_0, \quad (10)$$

где  $V_0 = 2U_0$ . Из (10) нетрудно идентифицировать матрицы **A** и **B**. Интересующие нас величины на стыке линий и на окончных зажимах второй линии образуют вектор реакции (вектор выходных переменных)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_{1'1'} \\ u_{22} \\ u_{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_1 + z_2} & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1 + z_2} & 0 \\ -\frac{2z_2}{z_1 + z_2} & -z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\ \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\ \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \end{bmatrix} V_0. \quad (11)$$

По (11) нетрудно идентифицировать матрицы **C** и **D**.

**Этап 2.** Решение уравнений состояния (6), (7). Принимая во внимание, что в рассматриваемой задаче  $u_{01} = U_0$  и, следовательно,  $\mathbf{x}' = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} 2U_0$ , решение (6) можно представить в виде

$$\mathbf{x}[k] = (e^{A\Delta t_k} - 1)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}V_0; \quad (12)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}V_0, \quad (13)$$

где согласно (9)

$$1 \leq k \leq \frac{T_0}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-7}} = 1500.$$

Выражение (12) реализовано в программе Тема\_12\_2.m. Кривые переходного процесса, полученные с ее помощью для обобщенной схемы (см. рис. 5) на интервале времени  $0 < t < T_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  с, представлены на рис. 6.

Эти кривые запоминаются в программе в виде их дискретных значений для моментов времени  $t_k$  с интервалом  $\Delta t = \Delta x / v$ . Иначе говоря, каждая из величин графика (см. рис. 6) представляется в программе Тема\_12\_2.m цифровой последовательностью из 1500 чисел. На рис. 6 пунктиром приведена также кривая разности между величинами  $u_{2'2'}$  и  $u_{22}$ . Далее в программе Тема\_12\_2.m из полученных кривых производится выборка для отдельных временных интервалов в соответствии с их физическим смыслом и перевод их в развертку относительно геометрических координат линий с шагом  $\Delta x$ .

**Этап 3. Расчет распределения напряжения  $u_1$  и тока  $i_1$  вдоль 1-й линии в момент времени  $T_0$ .** В данном примере падающая волна напряжения в первой линии описывается наипростейшей зависимостью  $u_{\phi 1} = U_0$ . При этом условии про-

странственное распределение напряжения  $u_1(x'_1)$  на участке  $0 < x'_1 < v \cdot T_0 = 90$  км линии будет подобно временной зависимости  $u_{1l}(t)$  на интервале  $0 < t < T_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  с. Перевод  $u_{1l}(t_k)$  в пространственную развертку  $u_1(x'_{1k})$  осуществляется на основе реализованной в программе связи

$$t_k \rightarrow x'_{1k} = vt_k. \quad (14)$$

Сказанное иллюстрирует кривая  $u_1(x'_{1k})$  на рис. 7, а. Отраженная волна напряжения на рассматриваемом участке линии строится по формуле

$$u_{\psi 1}(x'_1) = u_1(x'_1) - u_{\phi 1}(x'_1) = u_1(x'_1) - U_0. \quad (15)$$

Кривые распределения падающей и отраженной волн тока вдоль первой линии (см. рис. 7, б) получены по тривиальным зависимостям

$$i_{\phi 1}(x'_1) = \frac{u_{\phi 1}(x'_1)}{z_1} = \frac{U_0}{z_1}; \quad (16)$$

$$i_{\psi 1}(x'_1) = \frac{u_{\psi 1}(x'_1)}{z_1}. \quad (17)$$

График распределения тока  $i_1(x'_1)$  вдоль линии на интервале  $0 < x'_1 < v \cdot T_0 = 90$  км получен по формуле

$$i_1(x'_1) = i_{\phi 1}(x'_1) + i_{\psi 1}(x'_1). \quad (18)$$

**Этап 4. Расчет распределения падающих волн напряжения  $u_{\phi 2}(x_{11})$  и тока  $i_{\phi 2}(x_{11})$  вдоль 2-й линии в момент времени  $T_0$ .** Падающая волна во 2-й линии  $u_{\phi 2}$  формируется сразу же с момента прихода волны  $u_{\phi 1} = U_0$  к стыку линий. Если бы 2-я линия была бесконечно протяженной, то пространственное распределение  $u_{\phi 2}(x_{11})$  на участке  $0 < x_{11} < v \cdot T_0 = 90$  км 2-й линии была зеркально подобной временной зависимости  $u_{20}(t) = u_{22}(t)$  на интервале  $0 < t < T_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  с (см. рис. 6). Но 2-я линия короче 1-й, и в действительности  $0 < x_{11} < l_2 = 60$  км. Поэтому при построении падающей волны  $u_{\phi 2}(x_{11})$  в момент времени  $T_0$  (см. рис. 7, а) необходимо зеркально отобразить и пространственно развернуть лишь часть кривой  $u_{20}(t)$  (см. рис. 6) на участке

$$\frac{l_2}{v} = \frac{60}{3 \cdot 10^5} = 0,0002 \text{ с}. \quad (19)$$

Падающая волна тока (см. рис. 7, б) строится согласно зависимости

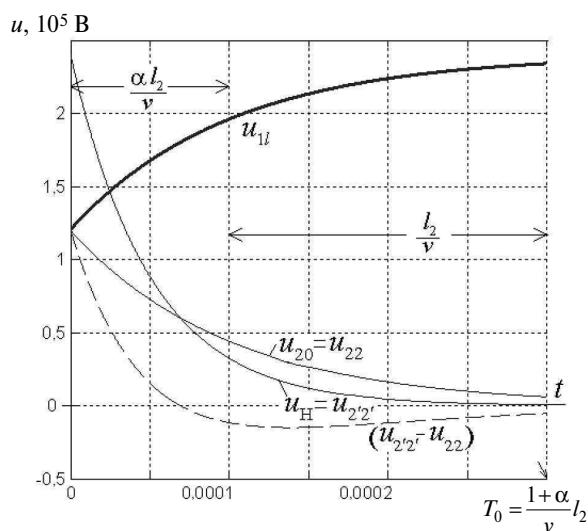


Рис. 6. Кривые переходного процесса в цепи (см. рис. 5) на интервале  $0 < t < T_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  с

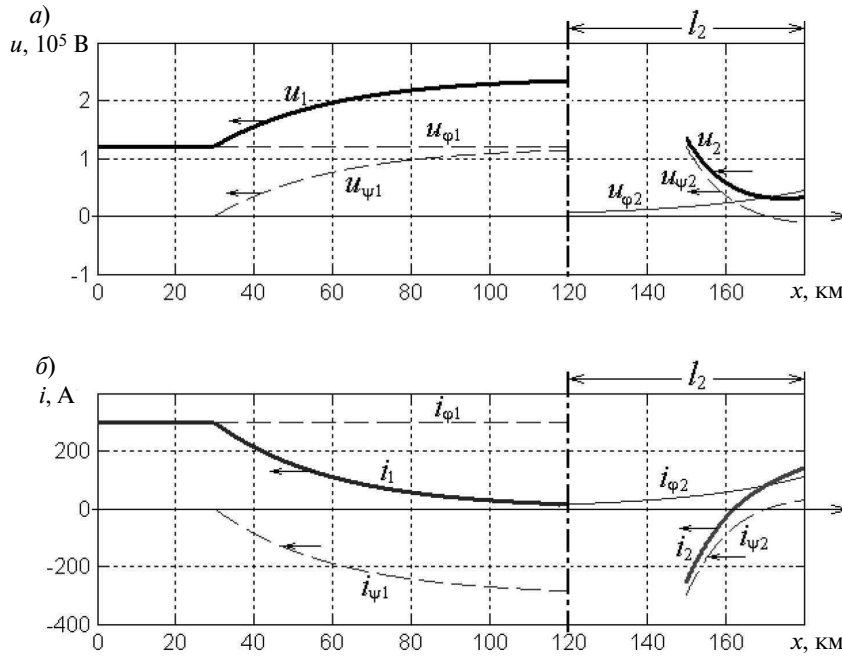


Рис. 7. Распределение напряжения (а) и тока (б) в линиях в момент времени, когда отразившаяся от конечных зажимов 2-й линии волна прошла половину ее длины

$$i_{\phi 2}(x_{II}) = \frac{u_{\psi 2}(x_{II})}{z_2}. \quad (20)$$

**Этап 5.** Расчет распределения отраженных волн напряжения  $u_{\psi 2}(x'_{II})$  и тока  $i_{\psi 2}(x'_{II})$  вдоль 2-й линии в момент времени  $T_0$ . Возникновение процессов, описываемых кривой напряжения на приемнике  $u_n = u_{2'2'}$  (см. рис. 6), приходится на момент времени, когда падающая волна во 2-й линии достигла ее конца. При этом для нас представляет интерес лишь ее начальная часть на интервале  $0 < t < \alpha l_2 / v = 1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ , показывающая изменение напряжения на приемнике под воздействием падающей волны, представленной на том же интервале времени кривой  $u_{22}$ . Очевидно, что разность этих величин есть обратная волна на конечных зажимах 2-й линии:

$$u_{\psi n} = u_n - u_{\phi n} \equiv u_{2'2'} - u_{22}. \quad (21)$$

Кривая  $(u_{2'2'} - u_{22})$  показана на рис. 6 пунктиром, причем смысл имеет лишь ее часть на участке  $0 < t < \alpha l_2 / v$ . Поскольку 2-я линия — без потерь, то пространственная развертка этой кривой по принципу  $\Delta x = v \Delta t$  дает распределение обратной волны  $u_{\psi}(x'_{II})$  напряжения вдоль 2-й

линии. Полученная таким образом обратная волна напряжения показана пунктиром на рис. 7, а.

Обратная волна тока во второй линии (см. рис. 7, б) строится согласно зависимости

$$i_{\psi 2}(x'_{II}) = \frac{u_{\psi 2}(x'_{II})}{z_2}. \quad (22)$$

**Этап 6.** Расчет распределения напряжения  $u_2$  и тока  $i_2$  вдоль 2-й линии в момент времени  $T_0$ . Графики напряжения  $u_2$  и тока  $i_2$  строятся в соответствии с формулами

$$u_2 = u_{\phi 2} + u_{\psi 2}; \quad (23)$$

$$i_2 = i_{\phi 2} + i_{\psi 2}. \quad (24)$$

Построенные с помощью этих зависимостей графики (см. рис. 7) совпадают с соответствующими кривыми [2], полученными аналитически, что подтверждает достоверность представленной методики и корректность программы Tema\_12\_2.m.

**Примечание 1.** Здесь (см. рис. 7) и далее на графиках утолщенными линиями выделены результирующие кривые распределения напряжения и тока в линиях в момент времени  $T_0$ . Все отраженные волны изображаются пунктиром.

В первой линии падающие волны напряжения и тока также представлены пунктирными линиями.

**Примечание 2.** Данный пример можно использовать и для контроля распределения прямоугольных волн в линиях без потерь с чисто (точнее, с почти чисто) резистивными элементами на стыке и в нагрузке, если задать значения  $C$  и  $L$  такими (например,  $C = 1,25 \text{ Ф}$  и  $L = 4 \cdot 10^6 \text{ Гн}$ ), чтобы постоянные времени схемы (см. рис. 5) оказались по модулю существенно меньшими времени движения волн вдоль линий. Это может служить дополнительным подтверждением достоверности рассматриваемого алгоритма, реализованного в программе.

На практике весьма часто возникает задача по изменению схемы стыка или приемника.

**Пример 2.** Пусть требуется в условиях задачи из Примера 1 подключить в цепь нагрузки компенсатор реактивной мощности (на частоте 50 Гц) в виде батареи конденсаторов (рис. 8). Иначе говоря, требуется подобрать емкость  $C$  конденсаторной батареи такую, чтобы входное сопротивление нагрузки на частоте 50 Гц было чисто активным. Это легко сделать, если вначале заменить последовательную  $RL$ -цепь эквивалентной параллельной  $gb$ -цепью с параметрами

$$g = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad b_L = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (25)$$

и приравнять индуктивную и емкостную проводимости:

$$b_L = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \omega C_0,$$

или

$$\frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0,04}{400^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0,04)^2} = 2\pi \cdot 50 \cdot C_0. \quad (26)$$

Отсюда находим  $C_0 = 25 \text{ мкФ}$ .

Схема рис. 8 имеет 3-й порядок сложности. Ее расчетная обобщенная схемная модель от-

личается от схемы на рис. 5 наличием дополнительной  $C_0$ -ветви между полюсами  $2'2'$ . Уравнения состояния этой схемы можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \\ u_{C_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(z_1 + z_2)C} & & \\ & -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{2z_2}{(z_1 + z_2)C_0} & \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{z_2 C_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \\ u_{C_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(z_1 + z_2)C} \\ 0 \\ \frac{2}{z_1 + z_2} \end{bmatrix} V_0; \quad (27)$$

$$y = \begin{bmatrix} u_{1'1'} \\ u_{22} \\ u_{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{(z_1 + z_2)} & & \\ -\frac{z_2}{(z_1 + z_2)} & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \\ u_{C_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_2}{(z_1 + z_2)} \\ \frac{z_2}{(z_1 + z_2)} \\ 0 \end{bmatrix} V_0. \quad (28)$$

Картина распределения волн в линиях, полученная с помощью программы Tema\_12\_2.m, иллюстрируется на рис. 9.

Пример наглядно показывает влияние компенсирующих устройств на характер волн в линиях. В данном случае оно полностью изменило их распределение. Реальные линии электропередач могут быть связаны через трансформаторы.

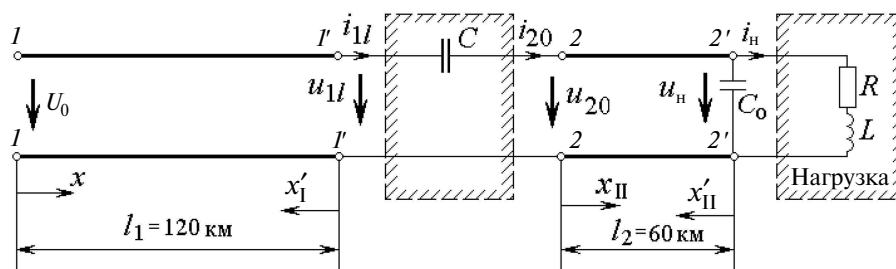


Рис. 8. Цепь с компенсирующим конденсатором  $C_0$  у приемника

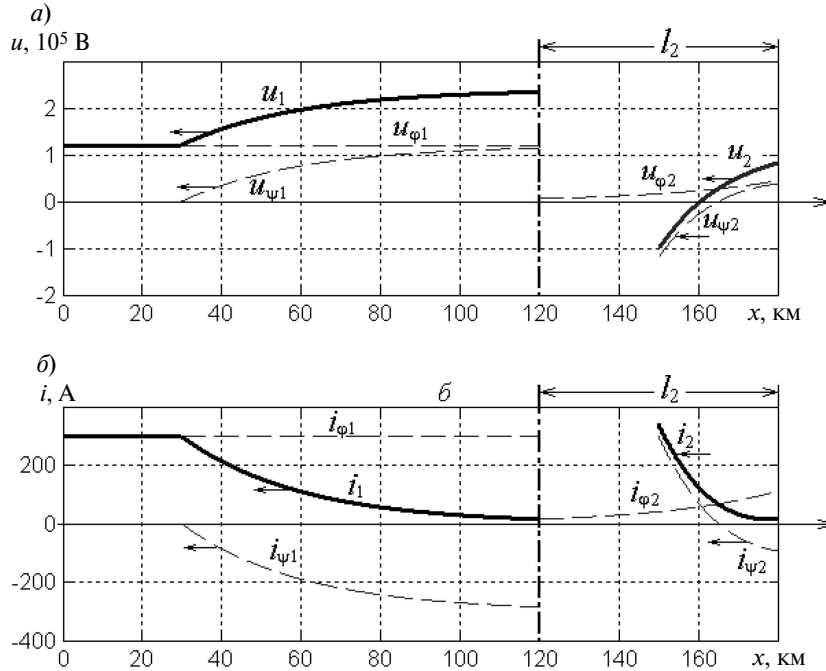


Рис. 9. Распределение напряжения (а) и тока (б) в линиях цепи (рис. 8) с компенсирующим устройством  $C_0$  на оконечных зажимах 2-й линии

**Пример 3.** Пусть в условиях задачи из Примера 1 на стыке находится трансформатор с параметрами  $L_1 = 4$  Гн;  $M = -1,97$  Гн;  $L_2 = 1$  Гн (рис. 10, а). Активные сопротивления его обмоток равны  $R_1 = 0,5$  Ом,  $R_2 = 0,0125$  Ом. Коэффициент трансформации  $n = \sqrt{L_1 / L_2} = 2$ . Коэффициент связи между обмотками  $k = |M| / \sqrt{L_1 L_2} = 0,985$ .

Расчетная обобщенная схемная модель изображена на рис. 10, б. Составленные для нее уравнения состояния имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_1 + z_1)L_2}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{(R_2 + z_2)L_2}{L_1 L_2 - M^2} & \\ \frac{(R_1 + z_1)M}{L_1 L_2 - M^2} & -\frac{(R_2 + z_2)L_1}{L_1 L_2 - M^2} & \\ & \frac{2z_2}{L_3} & -\frac{R_2 + z_2}{L_3} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \\ 0 \end{bmatrix} V_0; \quad (29)$$

$$y = \begin{bmatrix} u_{1'1'} \\ u_{22} \\ u_{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 & & \\ & z_2 & \\ & 2z_2 & -z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_0. \quad (30)$$

Полученная с помощью программы Тема\_12\_2.m картина распределения волн показана на рис. 11.

Сглаженные фронты отраженных волн напряжения и тока во второй линии являются следствием относительно низкого значения коэффициента связи  $k = 0,985$ . Для сравнения на рис. 12 представлены кривые распределения волн в случае трансформатора с более высокими значениями взаимной индукции между обмотками ( $M = -1,997$  Гн) и коэффициентом связи  $k = |M| / \sqrt{L_1 L_2} = 0,9985$ .

Нетрудно сообразить, какова тенденция преобразования этой картины волн для случая идеального трансформатора с коэффициентом связи  $k = 1$ .

В примерах 2 и 3 рассматривались системы 3-го порядка сложности. В следующем примере рассматривается система 4-го порядка сложности для случая подключения ее к источнику прямоугольного импульсного напряжения.



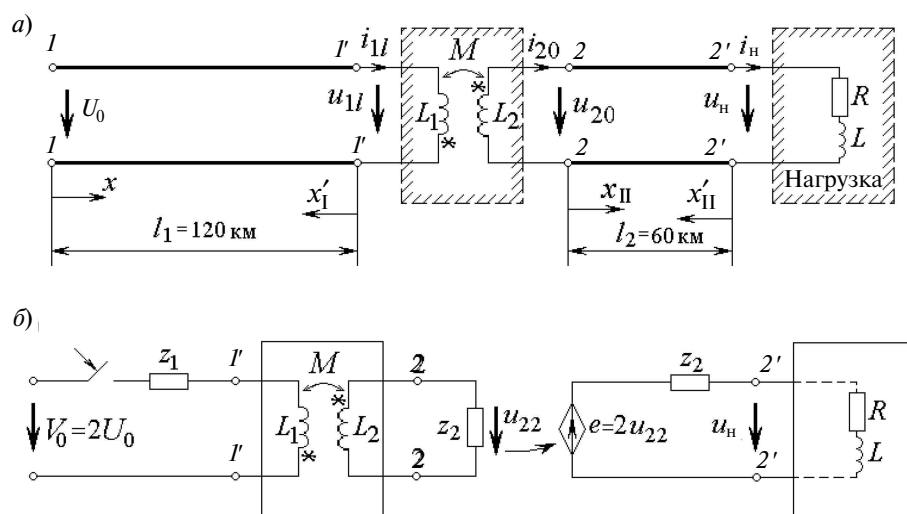


Рис. 10. Цепь с трансформатором на стыке (а) и ее расчетная обобщенная схемная модель (б)

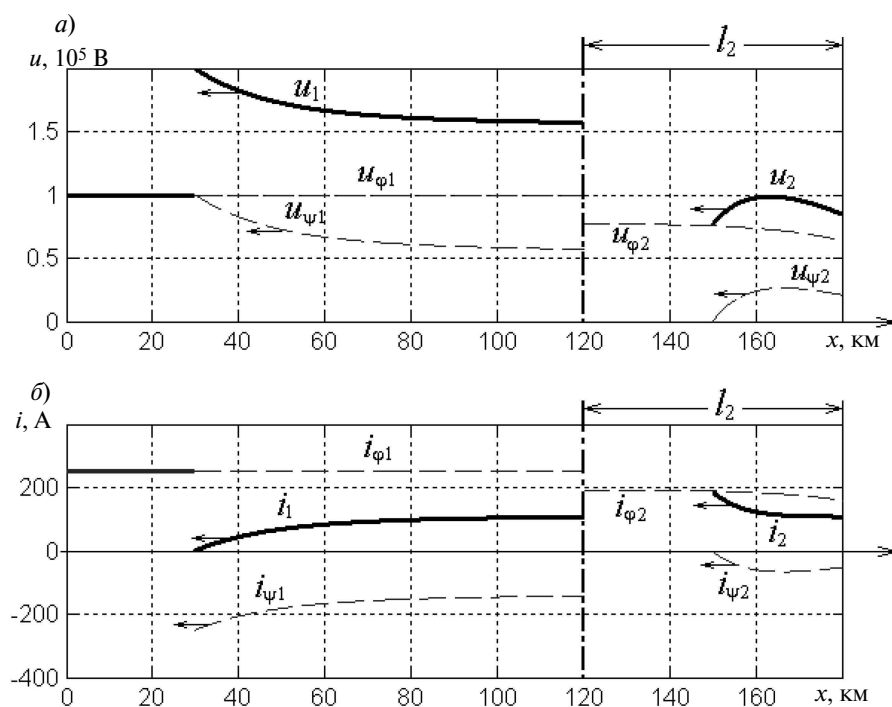


Рис. 11. Распределение напряжения (а) и тока (б) в цепи с трансформатором ( $n = 2$ ;  $k = 0,985$ ) на стыке линий

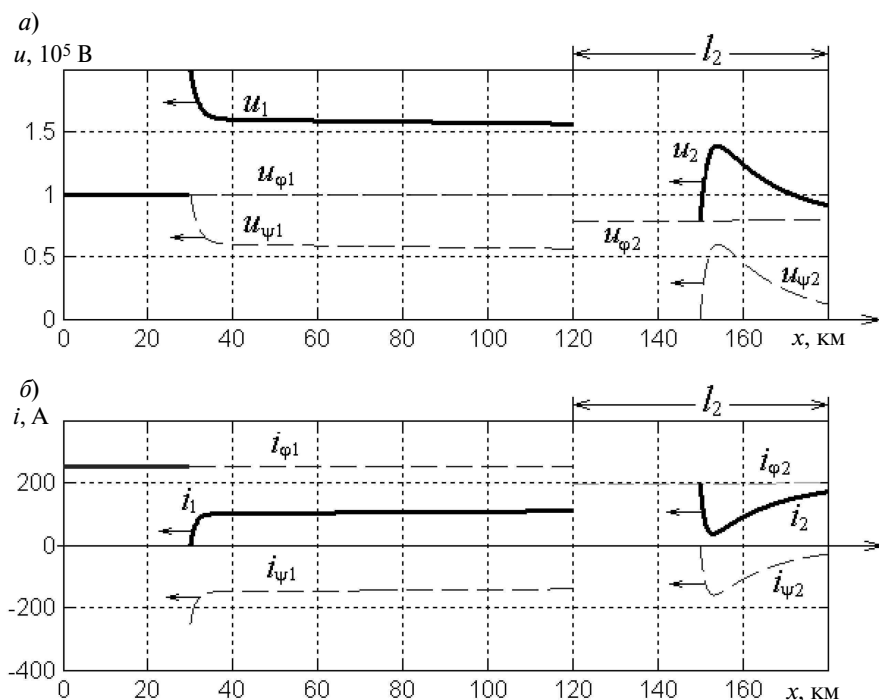


Рис. 12. Распределение напряжения (а) и тока (б) в цепи с трансформатором ( $n = 2$ ;  $k = 0,9985$ ) на стыке линий

**Пример 4.** Пусть система из двух линий без потерь (рис. 13, а) включается на прямоугольный импульс длительностью  $T_{\text{имп}} = (1/3)$  мс и амплитудой  $U_0$ . Очевидно, падающая волна в первой линии  $u_{\phi 1}$  также будет прямоугольной формы длиной

$$l_{\text{волн}} = vT_{\text{имп}} = 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} = 100 \text{ км},$$

что составляет четверть длины второй линии, т. е.  $l_{\text{волн}} = l_2 / 4$ . Такой прямоугольный импульс можно рассматривать как сумму двух противоположных по знаку волн ( $u'_{\phi 1} = U_0$  и  $u''_{\phi 1} = -U_0$ ) бесконечной длины, сдвинутых одна по отношению к другой на расстояние  $l_{\text{волн}}$ .

Решение получается вычитанием из графиков напряжений и токов, обусловленных первой падающей волной, аналогичных графиков напряжений и токов, вызванных второй падающей волной. Для обоих случаев используется одна и та же расчетная объединенная схемная модель (рис. 13, б). Ее уравнения состояния можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i_{L1} \\ u_{C1} \\ i_{L2} \\ u_{C2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)L_1} & -\frac{z_2}{(z_1 + z_2)L_1} & & \\ \frac{z_2}{(z_1 + z_2)C_1} & -\frac{1}{(z_1 + z_2)C_1} & & \\ -\frac{2z_1 z_2}{(z_1 + z_2)L_2} & -\frac{2z_2}{(z_1 + z_2)L_2} & -\frac{2z_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ & & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} i_{L1} \\ u_{C1} \\ i_{L2} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_2}{(z_1 + z_2)L_1} \\ \frac{1}{(z_1 + z_2)C_1} \\ \frac{2z_2}{(z_1 + z_2)L_2} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} V_0, \end{aligned} \quad (31)$$

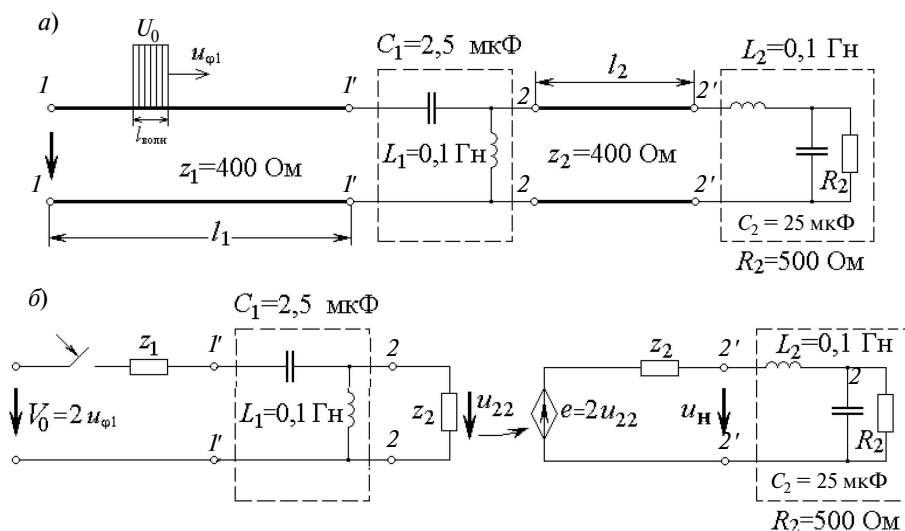


Рис. 13. Цепь 4-го порядка сложности (а) и ее расчетная обобщенная схемная модель (б)

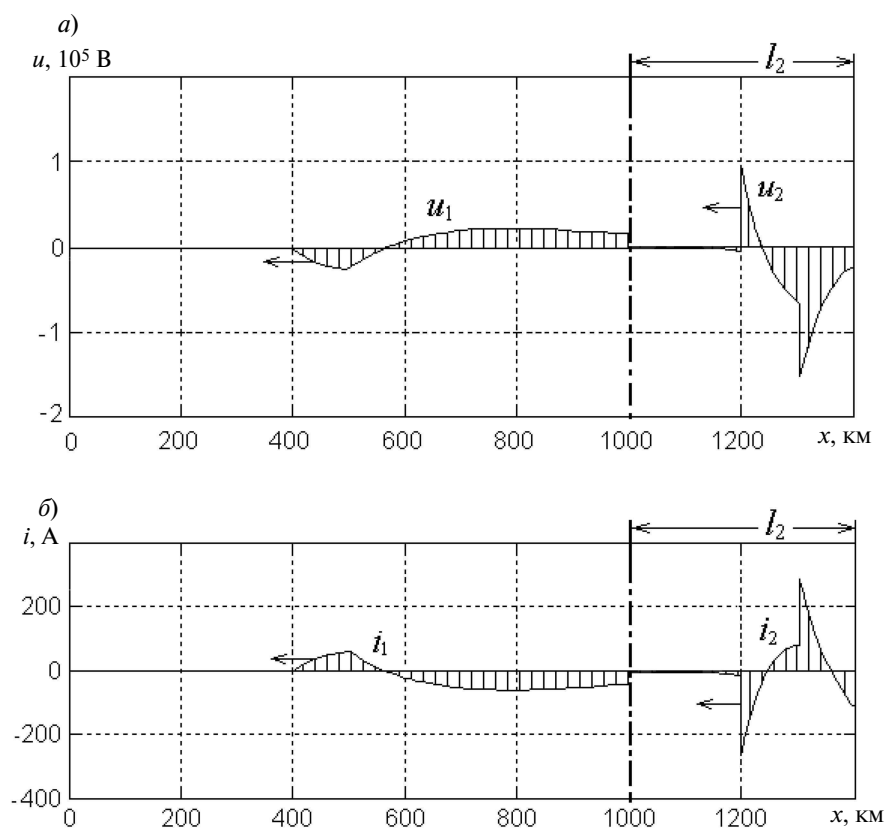


Рис. 14. Кривые распределения напряжения (а) и тока (б) при подключении системы к источнику импульсного напряжения прямоугольной формы

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_{1'1'} \\ u_{22} \\ u_{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} & \frac{z_1}{z_1 + z_2} & 0 & 0 \\ -\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} & -\frac{z_2}{z_1 + z_2} & 0 & 0 \\ -\frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} & -\frac{2z_2}{z_1 + z_2} & -z_2 & \frac{z_2}{R_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{L1} \\ u_{C1} \\ i_{L2} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_2}{(z_1 + z_2)} \\ \frac{z_2}{(z_1 + z_2)} \\ \frac{2z_2}{(z_1 + z_2)} \end{bmatrix} V_0. \quad (32)$$

Распределения напряжения и тока для момента времени, когда отраженная волна прошла половину второй линии, изображены на рис. 14.

Этот пример подтверждает, что порядок сложности системы для рассмотренной методологии не имеет значения.

В заключение подведем итоги.

Разработанный метод освобождает от весьма трудоемкой процедуры получения частных аналитических соотношений для анализа волн в линиях. Вместо нее разработана более простая процедура с применением уравнений переменных состояния для *обобщенной схемной*

*модели системы*, являющейся развитием известных расчетных схемных моделей Петерсена — Пфифнера.

Положенное в основу метода *представление решения* уравнения состояния обобщенной модели через матричную экспоненту следует рассматривать как *аналитическое соотношение*. Поэтому и весь разработанный метод решения задачи по построению распределения волн в линиях следует считать аналитическим. Ключом для перехода от временных зависимостей величин обобщенной схемной модели системы к пространственным величинам служит связь между пространственным шагом (то есть шагом печати распределения этих волн вдоль линий, произвольно принимаемым исследователем) и временным шагом расчета матричной экспоненты, вычисляемого программой.

Представленные в статье методика построения *обобщенной схемной модели системы* и примеры ее реализации для систем с двумя линиями могут быть использованы при разработке алгоритмов построения аналогичных моделей более сложных реальных систем, состоящих из трех и более линий, с воздействиями напряжений произвольной формы на входе и при любой сложности устройств на стыках и в нагрузках. Приведенные примеры могут быть использованы в качестве образцов для отладки программ в этих случаях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей [Текст] / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. — М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Практикум по ТОЭ: Часть 2 [Текст] / Под ред. М.А. Шакирова. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004.

## REFERENCES

1. Zeveke, G.V. Basics of circuit theory [Text] / G.V. Zeveke, P.A. Ionkin, A.V. Netushil, S.V. Strahov. — M.: Energoatomizdat, 1989.
2. Workshop on Theoretical Foundations of Electrical Engineering: Part 2 [Text] / Under the editorship of M.A. Shakirov. — SPb.: Publishing house SPbSPU, 2004.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ / AUTHORS

**ШАКИРОВ Мансур Акмелович** — доктор технических наук профессор кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, действительный член Академии электротехнических наук; 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, Россия; e-mail: manshak@mail.ru

**SHAKIROV Mansur A.** — St.-Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St.-Petersburg, Russia; e-mail: manshak@mail.ru

**БОРОНИН Виталий Николаевич** — доктор технических наук профессор кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, действительный член Академии электротехнических наук; 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, Россия; e-mail: tee.deep@eef.spbstu.ru

**BORONIN Vitalii N.** — St.-Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St.-Petersburg, Russia; e-mail: tee.deep@eef.spbstu.ru

**МОДУЛИНА Александра Николаевна** — кандидат технических наук доцент кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, Россия; e-mail: tee.deep@eef.spbstu.ru

**MODULINA Alexandra N.** — St.-Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St.-Petersburg, Russia; e-mail: tee.deep@eef.spbstu.ru