УДК 517.929

*Л.Д. Блистанова, В.И. Зубов, А.В. Зубов,
И.С. Стрекопытов, А.А. Клемина*

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

*L.D. Blistanova, V.I. Zubov, A.V. Zubov,
I.S. Strecopitov, A.A. Klemina*

THE BUILDING MINIMUM MULTITUDES AND INVESTIGATION OF STABILITY ON BASE METHOD OF LOW ORDER

В статье на основе метода понижения порядка излагается алгоритм нахождения числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена.

АЛГОРИТМ. КОРЕНЬ. ПЕРЕМЕНА ЗНАКА. МНОГОЧЛЕН. ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ.

In giving article on base method of low to order is expounds algorithm to calculating of number clear mystic roots by characteristic polynom.

ALGORITHM. ROOT. CHANGE OF SIN. POLYNOM. LEFT AND RIGHT SEMI-PLANE.

В статье предлагается новый метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод позволяет находить коэффициенты минимального многочлена в пределах точности представления чисел в компьютере и свободен от ошибок округления. Зная коэффициенты минимального многочлена, легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка. Излагается алгоритм нахождения числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена на основе метода понижения порядка. Решение этой задачи позволит исследовать достаточно тонкий вопрос о простой устойчивости линейной системы, т. е. тот случай, когда характеристический многочлен имеет, кроме корней лежащих в левой полуплоскости, чисто мнимые, но не кратные корни. Далее приведена общая методика исследования качественной картины распределения корней произвольного многочлена на комплексной плоскости.

Постановка задачи

Пусть A — вещественная постоянная матрица размера $n\times n$. Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени, аннулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени равным единице. Такой минимальный многочлен имеет вид

$$f(\lambda)=\lambda^k+c_{k-1}\lambda^{k-1}+\ldots+c_1\lambda+c_0=0, \qquad (1)$$

причем выполняется матричное тождество

$$\mathrm{A}^k+c_{k-1}\mathrm{A}^{k-1}+\ldots+c_1\mathrm{A}+c_0E=0. \qquad (2)$$

Заметим, что вещественные матрицы размера $n\times n$ образуют вещественное линейное пространство размерности n^2, где можно использовать все результаты и определения, полученные в линейной алгебре: линейную зависимость и независимость элементов; базис и разложение по нему и тому подобное [1].

Исходя из этого можно сформулировать очевидное утверждение — теорему о степени минимального многочлена

Теорема 1. Степень минимального многочлена равна $k+1$, если матрицы

$$\mathrm{A}^k, \mathrm{A}^{k-1}, \ldots, \mathrm{A}, \mathrm{A}^0 = \mathrm{E} \qquad (3)$$

линейно независимы, а матрицы

$$\mathrm{A}^{k+1}, \mathrm{A}^k, \mathrm{A}^{k-1}, \ldots, \mathrm{A}, \mathrm{E} \qquad (4)$$

уже линейно зависимы.

Доказательство. Действительно, если матрицы (4) линейно зависимы, то существуют вещественные числа $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$, не все равные нулю, такие, что выполняется матричное тождество

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i \mathrm{A}^i = 0, \quad \mathrm{A}^0 = \mathrm{E}. \qquad (5)$$

Из этого тождества следует, что $c_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае это бы означало, что матрицы (3) — линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство

$$\mathrm{A}^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} \mathrm{A}^k + \ldots + \frac{c_1}{c_{k+1}} \mathrm{A} + \frac{c_0}{c_{k+1}} \mathrm{E} = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества являются коэффициентами минимального многочлена [2]. Доказательство закончено.

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (3). Это матрица размера $n^2 \times (k+1)$, столбцы которой составлены из столбцов $\mathrm{A}_{im}, i = \overline{1,n}$ матриц $\mathrm{A}^m, m = \overline{k,0}$, записанных один под другим подряд начиная с первого столбца этой матрицы и кончая последним [5]:

$$\mathrm{B}_k = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1k} & \mathrm{A}_{1k-1} & \ldots & \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{A}_{2k} & \mathrm{A}_{2k-1} & \ldots & \mathrm{E}_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathrm{A}_{nk} & \mathrm{A}_{nk-1} & \ldots & \mathrm{E}_n \end{pmatrix} = (\mathrm{A}_k, \ldots, \mathrm{A}_0);$$

$$\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1m} \\ \mathrm{A}_{2m} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \text{где } m = \overline{k,0}. \qquad (7)$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (7) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы B_k, т. к. справедливо соотношение [3]

$$\mathrm{B}_k \mathrm{C} = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} c_i \mathrm{A}^i = 0; \quad \mathrm{C} = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T. \qquad (8)$$

Это означает, что линейная независимость матриц (7) эквивалентна тому, что матрица B_k размера $n^2 \times (k+1)$ является матрицей полного ранга, т. е. ранг равен $k+1$ [4].

Отсюда вытекает, что теорему 1 можно переформулировать в форме следующей теоремы.

Теорема 2. Если для первого из чисел $k = \overline{0,n}$ система линейных алгебраических уравнений

$$\mathrm{B}_k \mathrm{C} = \mathrm{A}_{k+1}; \quad \mathrm{C} = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T \qquad (9)$$

имеет решение, то минимальный многочлен матрицы A имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{-1} - \ldots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \qquad (10)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты $\mathrm{C} = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ минимального многочлена (10) являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (9).

Доказательство. Разрешимость уравнения (9) означает разрешимость матричного тождества

$$\mathrm{A}^{k+1} = c_k \mathrm{A}^k + c_{k-1} \mathrm{A}^{k-1} + \ldots + c_1 \mathrm{A} + c_0 \mathrm{E}. \qquad (11)$$

Поскольку k — минимальное из чисел $\overline{0,n}$, то многочлен (10) является минимальным многочленом.

С другой стороны, если многочлен (10) — минимальный многочлен, то справедливо матричное тождество (11), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (9). Доказательство закончено.

Рассмотрим многочлен

$$F(z) = a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{2n} z^{2n}, \qquad (12)$$

который имеет только кососимметричные корни и не имеет нулевых корней

Было показано, что с помощью алгоритма Евклида (АЕ) этот многочлен можно разбить на произведение «простых» многочленов, содержащих все корни исходного многочлена, которые взяты по одному и имеют одинаковую кратность.

Исходя из этого будем считать, что все кососимметричные корни многочлена $F(z)$ — простые; тогда их можно представить в виде

$$\pm\gamma_i\,(i=1,\ldots,p);\quad \pm i\Delta_j,\ \text{где}\ (j=1,\ldots,q);$$

$$\pm\rho_k\exp(\pm i\varphi_k),$$

где $0<\varphi_k<\pi/2$ и $(k=1,\ldots,r)$;

$$p+q+2r=n.$$

Причем величины γ_i различны между собой, величины Δ_j также различны между собой, как и пары (ρ_k,φ_k) — они тоже различны.

Используя методику Лобачевского квадрирования корней многочлена, можно написать

$$F(z)=a_{2n}\prod(z\pm\gamma_i)(z\pm i\Delta_j)(z\pm\rho_k\exp(\pm i\varphi_k))=$$
$$=a_0+a_2\mu+\ldots+a_{2n}\mu^n=f(\mu). \qquad (13)$$

Отсюда вытекает, что многочлен $f(\mu)$ имеет корни

$$\gamma_i^2\,(i=1,\ldots,p);\quad -\Delta_j^2\ \ (j=1,\ldots,q);$$

$$\rho_k^2\exp(\pm i2\varphi_k)\quad (k=1,\ldots,r).$$

Для того чтобы определить число отрицательных и положительных действительных корней многочлена $f(\mu)$, достаточно построить систему Штурма для этого многочлена и вычислить число перемен знака в этой системе на участке $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, т. е. величины $q=W(-\infty)-W(0)$ и $p=W(0)-W(+\infty)$, которые в силу теоремы Штурма равны соответственно числу отрицательных и положительных действительных корней этого многочлена. Таким образом, будут получены количества действительных ($2p$), чисто мнимых ($2q$) и комплексных ($4r=2(n-p-q)$) кососимметричных корней исходного многочлена $F(z)$.

Замечание 1. Методика исследования расположения корней исходного характеристического многочлена $F(z)$ относительно мнимой оси заключается в следующем:

1) необходимо применить МПП к этому многочлену, используя, если это нужно, ОС на отдельных шагах этого алгоритма. В результате в общем случае получим остаток в виде многочлена $r(z)$ и количество корней многочлена $f(z)$ (не имеющего кососимметричных корней), лежащих в левой $\mathrm{Re}\,z<0$ и правой $\mathrm{Re}\,z>0$ полуплоскости. Напомним, что эти многочлены связаны равенством $F(z)=f(z)r(z)$, причем возможно, что $r(z)\equiv 1$, и тогда п. 2 можно пропустить;

2) если в результате применения этого алгоритма получился остаток $r(z)$ в виде многочлена, содержащего все кососимметрические корни исходного многочлена, то следует разделить исходный многочлен на этот остаток с целью выделения многочлена $f(z)$, содержащего все корни исходного многочлена, кроме кососимметрических. В результате будет получен сам многочлен $f(z)$;

3) с помощью алгоритма Евклида (АЕ) эти многочлены необходимо разбить на произведение «простых» многочленов, которые содержат все корни исходных многочленов, имеющие одинаковую кратность и взятые по одному;

4) найти расположение корней «простых» многочленов, имеющих только кососимметричные корни, относительно мнимой оси с помощью квадрирования корней и теоремы Штурма, как об этом сказано выше;

5) найти количество отрицательных и положительных действительных корней «простых» многочленов, не имеющих кососимметричных корней, с помощью теоремы Штурма;

6) сопоставляя результаты п. 1 и п. 5, вычислить число комплексных корней многочлена $f(z)$, лежащих в левой и правой полуплоскостях.

Замечание 2. Для того чтобы доказать абсолютную устойчивость исходного многочлена, достаточно показать, что все его корни лежат в левой полуплоскости $(\mathrm{Re}\,z<0)$, т. е. использовать п. 1. Для того чтобы доказать устойчивость исходного многочлена, имеющего кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, еще и чисто мнимые корни, достаточно, используя пп. 3, 4, показать, что эти корни не являются кратными.

Для сложных многокомпонентных систем большого порядка само построение характеристического многочлена требует огромного числа вычислительных операций, сравнимого с n^2. Отсюда вытекает, что при $n>100$ эта задача становится практически вычислительно неразрешимой. Ниже предлагается итерационный метод оценки границ местонахождения корней характеристического уравнения линейной стационарной системы, т. е. метод исследования устойчивости и неустойчивости исходной системы. Оказывается, что для систем порядка $n>100$

с помощью этого метода можно провести анализ их устойчивости или неустойчивости за число операций меньшее, чем число операций, необходимых для построения характеристического многочлена матрицы исходной системы.

В.И. Зубов [5] показал, что необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости линейной стационарной системы

$$\dot{X} = AX \tag{14}$$

является

$$B^k \to 0 \quad \text{при } k \to \infty, \tag{15}$$

где $B = (A - E)^{-1}(A + E) = E + 2(A - E)^{-1}$.

Заметим, что корни характеристических полиномов $\det(A - \lambda E)$ и $\det(B - \rho E)$ связаны соотношениями

$$\lambda = -\frac{1+\rho}{1-\rho}, \tag{16}$$

а неособенное преобразование S для приведения матриц A и B к канонической форме Жордана — одно и то же. То есть $B = S^{-1}RS$, а $A = S^{-1}\Lambda S$, где матрицы R и Λ имеют одинаковую форму Жордана и различаются лишь элементами, стоящими по главной диагонали — ρ_i и λ_i, связанными соотношениями (16).

По аналогии, вводя дробно линейные преобразования полупространств комплексной плоскости, образуемых прямыми проходящими через стороны прямоугольника

$$-\gamma < \mathrm{Re}\lambda < \alpha; \quad -\beta < \mathrm{Im}\lambda < \beta, \tag{17}$$

в единичный круг $|\rho| < 1$, можно сформулировать теорему, служащую основой предлагаемого метода.

Теорема 3. Для того чтобы собственные числа матрицы A лежали в прямоугольнике (17), необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$B^k(\alpha) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty\ 4; \tag{18}$$

$$C^k(\gamma) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty\ 4; \tag{19}$$

$$D^k(\beta) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty, \tag{20}$$

где

$$B(\alpha) = (A + E(1-\alpha))(A - E(1+\alpha))^{-1} = \\ = E + 2(A - E(1+\alpha))^{-1};$$

$$C(\gamma) = (A - E(1-\gamma))(A + E(1+\gamma))^{-1} = \\ = E - 2(A + E(1+\gamma))^{-1};$$

$$D(\beta) = (iA + E(1-\beta))(iA - E(1+\beta))^{-1} = \\ = E + 2(iA - E(1+\beta))^{-1}.$$

Доказательство теоремы почти полностью повторяет доказательство соответствующей теоремы [5] с дополнительным введением в рассмотрение трех дробно линейных преобразований: полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < \alpha$ — в единичный круг; полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > -\gamma$ — в единичный круг; полосы $-\beta < \mathrm{Im}\lambda < \beta$ — в единичный круг.

Нетрудно заметить, что если собственные числа матрицы A лежат в прямоугольнике (17), то все матрицы $A - E(1+\alpha)$, $A + E(1+\gamma)$, $iA - E(1+\beta)$ — неособенные.

Если система (14) асимптотически устойчива, то выбирая наибольшее число $\alpha < 0$, для которого справедливы условия (17), получим точную верхнюю оценку: $\mathrm{Re}\lambda < \alpha$, где $\alpha = \max\alpha$: $B^k(\alpha) \to 0$ при $k \to \infty$.

Заметим, что при увеличении числа α вначале нарушается условие (18), а затем матрица $A - E(1+\alpha)$ может стать особенной.

Очевидно, что существует точная верхняя и точная нижняя оценки для прямоугольника (17), причем расположены собственные числа матрицы A, где число $\beta > 0$ — наименьшее из чисел, удовлетворяющее условию (20), число γ — наименьшее из чисел, удовлетворяющее условию (19), а число α — наименьшее ($\alpha > 0$) или наибольшее ($\alpha \le 0$) из чисел, удовлетворяющих условию (18).

При наличии кратных собственных чисел матрицы A, не имеющих элементарных делителей, т. е. при наличии жордановых клеток у матрицы A размерности ≥ 2, элементы последовательности (18), (19) или (20) могут вначале быстро расти, а затем стремиться к нулю. С помощью формулы Ньютона можно легко вывести оценку этого роста. Отметим здесь также, что итерационную последовательность (14) ((17)–(18)) при практической реализации можно заменить последовательностью

$$B \to B^2 \to B^4 \to B^8 \to B^{16} \ldots \to B^{2^k} \to \ldots \tag{21}$$

Поскольку операция перемножения квадратных матриц порядка n требует $2n^2$ арифметических операций, то для систем порядка $n > 10$ применение, к примеру, итерационного критерия (15) для выяснения асимптотической устойчивости системы (14) займет меньшее число вычислений, чем построение характеристического многочлена этой системы.

Задача 1. (В.И. Зубов) Пусть известны следы матриц

$$\mathrm{S}p\,\mathrm{B}^i = \mu_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Требуется через величины μ_i найти необходимые и достаточные условия выполнения соотношения (15), которые эквивалентны тому, что все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0)$.

Задача 2. (В.И. Зубов) Пусть известны следы матриц

$$\mathrm{S}p\,\mathrm{B}^{2^i} = \delta_i \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Требуется через величины δ_i найти необходимые и достаточные условия выполнения соотношения (15), которые эквивалентны тому, что все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0)$.

Задача 3. Согласно теореме 3 можно сформулировать следующую задачу. Пусть известны следы матриц

$$\mathrm{S}p\,\mathrm{B}^i = \mu_i; \quad \mathrm{S}p\,\mathrm{C}^i = \sigma_i;$$

$$\mathrm{S}p\,\mathrm{D}^i = \omega_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Требуется через величины $\mu_i, \sigma_i, \omega_i$ найти необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (18)–(20), которые эквивалентны тому, что все собственные числа матрицы A лежат в прямоугольнике (14).

В данной статье приведены рекуррентные алгоритмы, позволяющие практически мгновенно определить качественный состав корней характеристического многочлена и их расположение относительно мнимой оси. Таким образом, предложено решение задачи исследования устойчивости систем по первому линейному приближению. Эти алгоритмы по своей точности и производительности существенно превосходят такие известные алгоритмы, как критерии Гурвица и Михайлова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10–08–000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, А.В.** Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов.— СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2010.— 102 с.

2. **Зубов, А.В.** Динамическая безопасность управляемых систем [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов.— СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2009.— 172 с.

3. **Зубов, И.В.** Анализ систем управления и способы представления программных управлений [Текст] / И.В. Зубов. СПб.: Изд-во ВВМ, 2014.— 150 с.

4. **Зубова, О.А.** Анализ равновесных движений и задача идентификации [Текст] / О.А. Зубова, М.В. Стрекопытова.— СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013.— 256 с.

5. **Зубов, А.В.** Исследование устойчивости и надежности колебателдьных систем [Текст] / А.В. Зубов, С.В. Зубов, А.Ф. Зубова.— СПб.: Изд-во ВВМ, 2011.— 450 с.

6. **Стрекопытов, С.А.** Теория квазипериодических систем [Текст] / С.А. Стрекопытов.— СПб.: Изд-во ВВМ, 2014.— 157 с.

7. **Стрекопытова, М.В.** Анализ равновесных движений [Текст] / М.В. Стрекопытова.— СПб: Изд-во СПбГУ, 2014.— 176 с.

8. **Зубов, С.В.** Качественный анализ систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] / С.В. Зубов.— СПб: Изд-во ВВМ, 2014.— 114 с.

REFERENCES

1. **Zubov A.V., Zubov N.V.** Teoriia ustoichivosti i primenenie k zadacham chislennogo analiza [Tekst].— SPb.: Izd–vo NII khimii SPbGU, 2010.— 102 s. (rus.)

2. **Zubov, A.V.** Dinamicheskaia bezopasnost' upravliaemykh sistem [Tekst] / A.V. Zubov, N.V. Zubov.— SPb.: Izd-vo NII khimii SPbGU, 2009.— 172 s. (rus.)

3. **Zubov, I.V.** Analiz sistem upravleniia i sposoby predstavleniia programmnykh upravlenii [Tekst] / I.V. Zubov.— SPb.: VVM, 2014.— 150 s. (rus.)

4. **Zubova, O.A.** Analiz ravnovesnykh dvizhenii i zadacha identifikatsii [Tekst] / O.A. Zubova, M.V. Strekopytova.— SPb.: SPbGU, 2013.— 256 s. (rus.)

5. **Zubov, A.V.** Issledovanie ustoichivosti i nadezhnosti kolebateld'nykh sistem [Tekst] / A.V. Zubov, S.V. Zubov, A.F. Zubova.— SPb.: VVM, 2011.— 450 s. (rus.)

6. **Strekopytov, S.A.** Teoriia kvaziperiodicheskikh sistem [Tekst] / S.A. Strekopytov.— SPb.: VVM, 2014.— 157 s. (rus.)

7. **Strekopytova, M.V.** Analiz ravnovesnykh dvizhenii [Tekst] / M.V. Strekopytova.— SPb: SPbGU, 2014.— 176 s. (rus.)

8. **Zubov, S.V.** Kachestvennyi analiz sistem upravleniia i ustoichivost' raschetnykh dvizhenii [Tekst] / S.V. Zubov.— SPb: VVM, 2014.— 114 s. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ /AUTHORS

БЛИСТАНОВА Лидия Дмитриевна — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета ; 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. д. 7-9; e-mail: ddemidova@mail.ru
BLISTANOVA Lidiya D. — Saint Petersburg State University; 199034,7-9? Universitetskaya nab., St.Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

ЗУБОВ Всеволод Иванович — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. д.7–9; e-mail: ddemidova@mail.ru
ZUBOV Vsevolod I. — Saint Petersburg State University; 199034,7–9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

ЗУБОВ Афанасий Владимирович — доктор физико-математических наук профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. д.7-9; e-mail: ddemidova@mail.ru
ZUBOV Afanasii V. — Saint Petersburg State University; 199034,7-9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

СТРЕКОПЫТОВ Иван Сергеевич — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. д. 7-9; e-mail: ddemidova@mail.ru
STRECOPITOV Ivan S. — Saint Petersburg State University; 199034,7-9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

КЛЕМИНА Антонина Александровна — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. д. 7–9; e-mail: ddemidova@mail.ruddemidova@mail.ru
KLEMINA Antonina A. — Saint Petersburg State University; 199034,7-9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru