

УДК 519.3

М.Р. Петриченко

ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ОДИНОЧНОГО СТОКА

M.R. Petrichenko

FILTRATION FIELD AND FILTRATION CAPACITY OF SINGLE FLOW

Депрессионная кривая фильтрационного потока в однородной перемычке получается как асимптотическая форма решения предельной задачи для уравнения Крокко, описывающего эволюцию «фильтрационного потенциала». Выясняется: отсутствие депрессионной воронки конечного радиуса и равносильность условия Дюпюи на расход интегральному условию равенства площадей влияния.

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК. ПРОМЕЖУТОК ВЫСАЧИВАНИЯ. СТОК И ПОТЕНЦИАЛ СТОКА. УРАВНЕНИЕ КРОККО. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА.

Depression curve flow in a uniform bridge is obtained as the asymptotic form of the solution of the limit problem for Crocco equation describing the evolution of «filtration capacity.» It turns out: the lack of finite radius cone of depression and the equivalence conditions Dupuis on the condition that the integral flow area of influence.

SEEPAGE FLOW GAP SEEP. STOCK AND POTENTIAL RUNOFF. OF CROCCO. THE LIMIT PROBLEM.

Постановка задачи. Промежуток высачивания в нижнем бьефе необходим для существования живого сечения, сопрягающего фильтрационный поток с нижним бьефом. Действительно, если депрессионная кривая выклинивается в нижний бьеф на урезе воды, то в точке высачивания одновременно пересекаются две линии тока. Поэтому выклинивание депрессионной кривой выше уреза воды необходимо для единственности решения уравнений фильтрационного движения [1]. Определение высоты промежутка высачивания $\Delta = h' - h_0 > 0$ в теории Дюпюи требует привлечения искусственных расчетных схем и допущений. В [2] предложен альтернативный прием, основанный на погружении решений уравнения неравномерного движения в поле некоторого функционала. Получается, что экстремаль, представляющая депрессионную кривую, длиннее и проходит не ниже параболы Дюпюи, выклиниваясь на низовой откос выше уреза воды. Прогнозы Δ близки к решениям [1, 3].

Причина образования разрыва непрерывности за точкой выхода депрессионной кривой на низовой откос описана в [3, 4] на примере

однородного полуограниченного массива с дренажным стоком (рис. 1). В предлагаемой статье приводятся небольшие количественные уточнения результатов [3, 4].

Пусть до момента времени $t = 0$ в полуограниченном однородном массиве и в дренажной скважине поддерживался естественный уровень воды (отметка H). В моменты времени $t > 0$ производится откачка воды из дренажа. Уровень воды в скважине падает, если расход стока превышает фильтрационный расход в сечении $x = 0$ фильтрационного потока. Для дальнейшего важно сопоставить скорости движения воды в дренажном стоке и в массиве. Скорость $\frac{dh'}{dt} = O(k)$ опускания депрессионной кривой в выходном сечении с глубиной $h = h'$ (k — коэффициент фильтрации) меньше скорости движения (опускания) свободной поверхности в скважине, равной $\frac{dh}{dt} = v_0$. Очевидно, что $v_0 \gg k$ и депрессионная кривая «отрывается» от уреза воды. Образуется промежуток высачивания.

Когда опускание уреза воды в скважине прекращается, то дальнейшая работа дренажа происходит только за счет поступления воды из грунтового массива. Высота промежутка высачивания стабилизируется (промежуток высачивания медленно уменьшается или даже не изменяется).

Условие материального баланса для дренажного колодца имеет вид

$$q_i = q_e + B \frac{dh_0}{dt}, \quad (1)$$

где q_i — расход воды из пласта в дренаж; q_e — расход воды, забираемой из скважины (обильность стока); B — диаметр скважины. Вводятся безразмерные переменные:

$$\eta = \frac{h}{H} \in (0, 1); \quad \xi = \frac{x}{H} > 0; \quad \tau = \frac{kt}{H}; \quad \beta = \frac{B}{H};$$

$$\eta_0 = \frac{h_0}{H} \in [0, 1]; \quad \eta' = \frac{h'}{H} \zeta_e = \frac{q_e}{kH}.$$

Тогда (1) имеет вид

$$\eta' \left(\frac{\partial \eta'}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \zeta_e + \beta \frac{d\eta_0}{d\tau}. \quad (1a)$$

Считается, что фильтрационный расход в сечении $x = 0$ ($\xi = 0$) вычисляется по Дюпюи.

Условие (1a) рассматривается как предельное в сечении $x = 0$ ($\xi = 0$) для уравнения нестационарной фильтрации

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right), \quad (2)$$

причем $D(\eta) = (\xi, \tau)$ (где $\xi \geq 0, \tau \geq 0$) и, кроме (1a), ставится условие при $\tau = 0$ ($t = 0$):

$$\eta(\xi, 0) - 1 = 0. \quad (1б)$$

Для вычисления высоты промежутка высачивания достаточно решить предельную задачу (1a, б), (2) и найти η' . Для этого, прежде всего, необходимо привести уравнение Буссинеска (2)

к стандартному виду. Пусть $\eta = \eta \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) = \eta(\zeta)$.

Это преобразование приводит (2) к нелинейному уравнению второго порядка [1]

$$\eta \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 + 2\zeta \frac{d\eta}{d\zeta} = 0, \quad (2a)$$

причем предельные условия (1a, б) ставятся так:

$$\eta' \left(\frac{d\eta'}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} - 2\sqrt{\tau} \left(\zeta_e + \beta \frac{d\eta_0}{d\tau} \right) = \eta(\infty) - 1 = 0. \quad (1в)$$

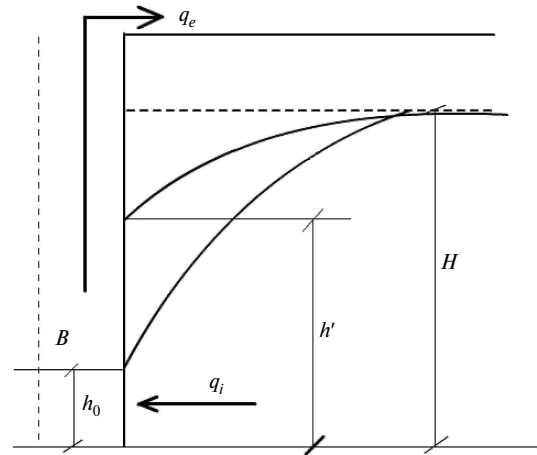


Рис. 1. Однородный полуограниченный массив с дренажным стоком (колодцем)

Предельные задачи для (2a) решены в [1]. При этом смешанное предельное условие не разбирается. В [5, 6] предлагается свести (2a) к уравнению Крокко [7]. Используется понижающая порядок подстановка: $j = \frac{d\eta}{d\zeta} = j(\eta), j(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 1$.

Тогда в силу (2a)

$$\eta \frac{dj}{d\eta} + j = -2\zeta(\eta), \quad (2б)$$

что сразу же дает первый интеграл:

$$\eta j(\eta) = 2 \int_{\eta}^1 \zeta(z) dz.$$

Учтено, что $j(1) = 0$. Функция $\varphi(\eta) = \int_{\eta}^1 \zeta(z) dz$

(«потенциал фильтрации») обладает очевидными свойствами: $\varphi(1) = 0; \frac{d\varphi}{d\eta} = -\zeta$. Тогда

$$j = \frac{d\eta}{d\zeta} = - \frac{1}{\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}}$$

что позволяет уравнение (2б) записать в виде уравнения Крокко для $\varphi(\eta)$:

$$2\varphi \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \eta = 0; \quad \eta' < \eta < 1. \quad (2в)$$

Предельные условия для (2в) очевидны:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=\eta'} = \varphi(1) = 0. \quad (1г)$$

Первое из условий — (1z) — означает, что $\zeta = 0, \eta = \eta'$. Второе следует из определения потенциала фильтрации Крокко. Наряду с двухточечными предельными условиями (1z) должны выполняться односточечные предельные условия, следующие из (1z, в), а именно:

$$\varphi(\eta') - \sqrt{\tau} \left(\zeta_e + \beta \frac{d\eta_0}{d\tau} \right) = 0; \quad \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=\eta'} = 0, \quad (3)$$

или, после ввода обозначения $\psi(\tau) = \sqrt{\tau} \left(\zeta_e + \beta \frac{d\eta_0}{d\tau} \right)$,

$$\varphi(\eta') - \psi(\tau) = 0; \quad \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=\eta'} = 0. \quad (3a)$$

Предельные задачи для уравнения Крокко изучены в [6]. Основные результаты анализа: $\varphi(\eta) \geq 0; 0 \leq \eta' < \eta < 1$. Причем на промежутке $\eta \in (\eta', 1)$ нет точек, сопряженных с точкой $\eta = \eta'$: монотонные решения уравнения Крокко, удовлетворяющие естественным предельным условиям (3), (3a) совпадают с одной из экстремалей поля этого функционала. Иначе говоря, монотонное решение $\varphi(\eta)$ уравнения Крокко такое, что при $1 \geq \eta > \eta' \geq 0$ существует

$$\varphi(\eta') > \varphi(\eta) \geq \varphi(1) = \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=\eta'} = 0,$$

которое совпадает (при фиксированном значении η') с одной и только с одной из (слабых) экстремалей для производящего функционала.

Для построения производящего функционала уравнение Крокко (2в) записывают в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\eta} &= \psi; \\ \frac{d\psi}{d\eta} &= -\frac{\eta}{2\varphi}, \end{aligned} \quad (2z)$$

откуда сразу видно, что это каноническая система с непараметрическим гамильтонианом (энергией)

$$E(\eta, \varphi, \psi) = \frac{\psi^2}{2} + \frac{\eta}{2} \ln \varphi.$$

Тогда двойственная по Лежандру функция

$$\begin{aligned} \Lambda \left(\eta, \varphi, \frac{d\varphi}{d\eta} \right) &= \sup_{(\psi)} \left(\psi \frac{d\varphi}{d\eta} - E(\eta, \varphi, \psi) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 + \eta \ln \frac{1}{\varphi(\eta)} \right) \end{aligned}$$

является плотностью распределения для функционала $\mathfrak{Z}(\varphi) = \int_{\eta'}^1 \Lambda d\eta$. Иначе говоря:

1. Среди гладких траекторий, удовлетворяющих условиям (1z), существуют такие близкие траектории $C^{(1)}(\eta', 1)$, что вдоль них $\delta \mathfrak{Z} = \int_{\eta'}^1 \delta \Lambda d\eta = 0$, где δ означает изометрическую вариацию (промежуток $\eta' < \eta < 1$ фиксирован).

2. При этом необходимое условие экстремума функционала $\mathfrak{Z}(\varphi) = \int_{\eta'}^1 \Lambda d\eta$ совпадает с уравнением Крокко (2в), что и объясняет термин «производящий функционал».

Принципиально важно, что уравнение, описывающее диссипативный процесс (диффузия воды через поровое пространство грунта или распространение трения в пограничном слое вязкого газа), оказывается каноническим и связанным с вариационным условием $\delta \mathfrak{Z} = \int_{\eta'}^1 \delta \Lambda d\eta = 0$.

При этом «энергия» $E(\eta, \varphi, \psi) = \frac{\psi^2}{2} + \frac{\eta}{2} \ln \varphi$, определяемая уравнением Крокко, убывает с увеличением η , т. е. «фазовая масса» $E d\varphi d\psi$ уменьшается. Это связано с тем, что гамильтониан — параметрический, — явно зависит от η . Действительно, согласно теореме Лиувилля дивергенция фазовой скорости

$$\vec{c} = \left(c_\varphi = \frac{\partial E}{\partial \psi}, c_\psi = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} \right)$$

равна

$$\text{div } \vec{c} = \frac{\partial c_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial c_\psi}{\partial \psi} = 0.$$

Значит, вдоль экстремалей поля производящего функционала

$$\frac{dE}{d\eta} = \frac{\partial E}{\partial \eta} + \text{div} \left(\vec{c} E \right) = \frac{\partial E}{\partial \eta} + \vec{c} \text{ grad} E =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \ln \varphi < 0;$$

$$0 \leq \varphi(\eta) < \varphi(\eta') < 1,$$

где оператор $d/d\eta$ означает производную в силу поля (или, как ее еще именуют, субстанциальную производную), а $\partial/\partial\eta'$ означает локальную (частную) производную.

Интегральное тождество для предельной задачи (2в) и (1з). В [8] изложено решение предельной задачи (2в), (1з) с помощью расщепляющих разложений. Здесь же будет использован упрощенный интегральный прием, основанный на выполнении закона сохранения (формула интегрирования по частям). Очевидно, что в силу (2в) и (1з) выполняется тождество (закон сохранения)

$$\int_{\eta'}^1 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 d\eta = \frac{1-\eta'^2}{4}, \quad (4)$$

или (в понятных символах)

$$\left\| \frac{d\varphi}{d\eta} \right\|_{L_2}^2 = \frac{1-\eta'^2}{4}, \quad (4a)$$

т. е. для существования решения предельной задачи (2в), (1з) необходимо: $\varphi \in W_2^{(1)}(\eta', 1)$. Но тогда и подавно $\varphi \in W_1^{(1)}(\eta', 1)$; иначе при интегральном описании фильтрационного потенциала достаточна измеримость (L) производной потенциала. Но $\frac{d\varphi}{d\eta} = -\zeta$. Поэтому получается, что для существования фильтрационного потенциала достаточно ограниченности площади $\int_{\eta'}^1 \zeta d\eta$, трактуемой как «площадь области питания» фильтрационного потока.

Пусть «навязывается» следующее распределение для потенциала фильтрации Крокко:

$$\varphi_m(\eta; \eta') = a \left[1 - \left(\frac{\eta - \eta'}{1 - \eta'} \right)^m \right]; \quad a = \varphi_m(\eta'; \eta'). \quad (5)$$

Это распределение зависит от трех констант: a, m, η' . Для их определения имеются два условия: тождество (4) и условие (3), или равносильное (3a). Третье условие эвристическое. Если в определении (4) $\eta' = 0$, то в силу (4), (4a) будет

$$\left\| \frac{d\varphi_m}{d\eta} \right\|_{L_2}^2 = \frac{1}{4}. \quad (4б)$$

Тогда решение предельной задачи (2в), (1з), как указано в [1], совпадает с известным решением Блазиуса и $\varphi_m(0; \eta') = 0,33206$. С другой стороны, в силу (4б)

$$\frac{(am)^2}{2m-1} = \frac{1}{4}; \quad a = \frac{1}{2m} \sqrt{2m-1} = a_0.$$

При $m = 4$, $a_0 = \varphi_m(0; \eta') = 0,3307$, что отличается от решения Блазиуса на 0,4%. Итак, $m = 4$ — неплохое приближение к точному решению. В общем случае в силу (4) и (5)

$$\frac{(am)^2}{2m-1} \frac{1}{1-\eta'} = \frac{1-\eta'^2}{4},$$

откуда $a = \frac{\sqrt{2m-1}}{2m} (1-\eta') \sqrt{1+\eta'} = a_0 (1-\eta') \sqrt{1+\eta'}$.

Итак, распределение потенциала фильтрации Крокко на промежутке глубин фильтрации имеет вид

$$\varphi(\eta; \eta') = a_0 (1-\eta') \sqrt{1+\eta'} \left[1 - \left(\frac{\eta - \eta'}{1 - \eta'} \right)^4 \right],$$

причем нижний индекс m ($m = 4$) у потенциала фильтрации φ опущен. Значит,

$$\varphi(\eta') = \varphi(\eta'; \eta') = \frac{1}{3} (1-\eta') \sqrt{1+\eta'}. \quad (6)$$

Высота (внешнего) промежутка высачивания.

Основная идея заключается в следующем.

1. Поступление воды в сток (дренажную скважину) происходит за счет осушения площади криволинейного треугольника, ограниченного депрессионной кривой и прямой $\eta = 1$, т. е. за счет поступления воды из «области питания». Ввиду того, что мгновенный фильтрационный расход правильно прогнозируется по Дюпюи, то площади областей питания по Дюпюи и по точному решению уравнения Крокко должны совпадать.

2. Мгновенное значение фильтрационного расхода из пласта можно подсчитать по точной формуле $q = kh' \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0}$ и по Дюпюи исходя из мгновенных значений глубины. В безразмерных переменных:

$$\frac{1-\eta_0^2}{2\lambda} = \eta' \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \eta' j(\eta') = \frac{\varphi(\eta')}{\sqrt{\tau}}. \quad (7)$$

Здесь $\lambda H = L$, L — длина влияния фильтрационного стока. Площадь области питания по Дюпюи:

$$S_D = \int_0^\lambda \left(1 - \sqrt{\eta_0^2 + \frac{\xi}{\lambda}(1-\eta_0^2)} \right) d\xi =$$

$$= \frac{\lambda(1-\eta_0)(1+2\eta_0)}{3}, \quad 0 < S_D < \frac{\lambda}{3}.$$

Площадь области питания по точному решению уравнения Крокко вычисляется точно. Получается

$$S_C = \int_0^\infty (1-\eta) d\xi = -2\sqrt{\tau} \int_{\eta'}^1 (1-\eta) \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} d\eta = 2\sqrt{\tau}\varphi(\eta'),$$

$$0 < S_C < \infty.$$

Но $S_D = S_C$. Поэтому «радиус влияния стока» пропорционален времени:

$$\lambda = \frac{6\sqrt{\tau}(1+\eta_0)\varphi(\eta')}{(1-\eta_0)(1+2\eta_0)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\tau}(1+\eta_0)(1-\eta')\sqrt{1+\eta'}}{(1-\eta_0)(1+2\eta_0)}. \quad (8)$$

Развитие депрессии во времени удобно оценить с помощью формулы (8). Как видно, $\lambda \xrightarrow{\eta_0 \rightarrow 1-0} \infty$; $\lambda \xrightarrow{\eta_0 \rightarrow +0} 2\sqrt{\tau}(1-\eta')\sqrt{1+\eta'}$. Ясно, что на малых временах фильтрационная воронка, формирующая сток, получается «короткой»; кроме того, $\lambda \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \infty$; $\frac{d\lambda}{d\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ равномерно в квадрате $0 < \eta_0 < 1$, $0 < \eta' < 1$. Тогда размерная скорость перемещения депрессионной кривой равна $\frac{dL}{dt} = k \frac{d\lambda}{d\tau} = O\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\right)$. Мгновенная (в различные моменты времени) конфигурация депрессионной кривой показана на рис. 2.

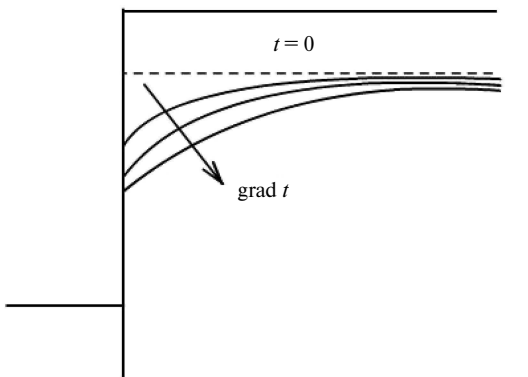


Рис. 2. Мгновенные конфигурации депрессионных кривых

Исключение функции $\lambda(\tau)$ из (8) и подстановка в (7) позволяет установить связь глубины фильтрационного потока в точке выхода депрессионной кривой на поверхность стока и глубиной воды в скважине:

$$\frac{4}{3}(1-\eta')^2(1+\eta') = (1-\eta_0)^2(1+2\eta_0). \quad (9)$$

Очевидно: $\eta_0 = 0 \rightarrow \eta' > 0$; точнее, $\eta' = 0,219$. Пусть $\eta_0 = 1 - \varepsilon$, $\eta' = 1 - \delta$, $\varepsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$. Тогда $\delta < \varepsilon \ll 1$. Действительно, в силу (9): $\frac{4}{3}\delta^2 = \varepsilon^2$;

$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon$. Поэтому $\bar{\Delta} = \eta' - \eta_0 = \varepsilon - \delta > 0$. Значит, всегда существует внешний промежуток высачивания с ненулевой высотой. Практическое вычисление $\eta'(\eta_0)$, $\bar{\Delta} := \eta'(\eta_0) - \eta_0$ показано на рис. 3. Впрочем, можно непосредственно решить уравнение (9), кубическое относительно $\eta'(\eta_0)$, и отделить вещественный корень из промежутка $\eta' \in (0, 1)$. На рис. 3 левая часть уравнения (9) обозначена $L(\eta)$, правая часть обозначена $R(\eta)$. Это — взаимно-однозначные функции от $\eta \in (0, 1)$. Как видно из (9): $0 \leq L \leq 4/3$; $0 \leq R \leq 1$, причем при небольших значениях $\eta R < L$. Отсюда следует $\eta' > \eta_0$.

Асимптотическое положение депрессионной кривой по Крокко оценивается так. Пусть уровень жидкости в скважине на «больших» промежутках времени $\tau \gg 1$ опустился до значения $\eta_0 = 0$. Тогда $\varphi(\eta') \approx \sqrt{\tau}\zeta_e \leq \frac{1}{3}$. Например, пусть будет

$$k = 10^{-4} \text{ м/с}; \quad H = 10 \text{ м}; \quad q_e = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\tau = 0,1 \text{ (} t = 10^4 \text{ с)}; \quad \zeta_e = 1; \quad \varphi(\eta') = \sqrt{0,1}; \quad \eta' = 0,$$

т. е. за время порядка 10 часов депрессионная кривая приходит на дно скважины. Если в тех же условиях (нулевая глубина воды в скважине и те же значения k, H, τ) расход из скважины (откачку) уменьшить вдвое или при сохранении интенсивности откачки время уменьшить в четыре раза, то отставание депрессионной кривой от уреза воды в скважине увеличится. Тогда $\varphi(\eta') = 0,158$, $\eta' = 0,6$, и будет сохраняться довольно большой промежуток высачивания. Следовательно, при «быстрой» откачке ($\tau \ll 1$), $\varphi(\eta') \rightarrow +0$, $\eta' \rightarrow 1-0$, и есть основание полагать, что область фильтрационной воронки мала: $\lambda = O(\sqrt{\tau}(1-\eta')) \ll 1$.

Итак:

1. Образование промежутка высачивания обусловлено различием масштабов скорости течения воды в стоке и в грунтовом массиве. Например, в случае дренажного стока (в принятых обозначениях) $\left| \frac{dh_0}{dt} \right| \gg k \frac{\partial h}{\partial x} = O(k)$. Поэтому $\left| \frac{dh_0}{dt} \right| \gg \left| \frac{dh'}{dt} \right|$, что приводит к образованию отрыва уреза воды от депрессионной кривой.

2. Скорость изменения глубины выходного сечения фильтрационного потока убывает по времени, как величина $O\left(\sqrt{\frac{H}{kt}}\right)$. Поэтому на промежутках времени протяженностью $t=O(H/k)$ депрессионная кривая практически неподвижна, и формирование свободной поверхности завершается.

В таком же масштабе времени изменяется длина фильтрационной воронки $\lambda(\tau)$. На промежутках времени малой протяженности ($\tau \ll 1$) поверхность стока ведет себя как шпунтовая стенка и мгновенная высота промежутка высачивания близка к значению $H - h_0$.

Асимптотическая форма депрессионной кривой. Содержание этого пункта представляет небольшое видоизменение решения из работы [2]. В традиционной теории Дюпюи депрессионная воронка описывается выражением

$$\eta = \sqrt{\eta_0^2 + \frac{\xi}{\lambda}(1 - \eta_0^2)},$$

где $0 < \xi < \lambda$; $\lambda = \frac{L}{H}$.

Тогда площадь области питания, как получено выше, $S_D = \frac{\lambda(1 - \eta_0)(1 + 2\eta_0)}{3(1 + \eta_0)}$. Величина

$\frac{q}{kH} = \frac{l}{H} = \frac{1 - \eta_0^2}{2\lambda}$, согласно известному результату И.А. Чарного [1], точно прогнозирует расход фильтрационного потока, но конфигурация депрессионной кривой по известным причинам неудовлетворительна и не может быть исправлена в представлениях традиционной теории [2, 3, 9].

Для определения положения депрессионной кривой можно использовать такой прием. Уравнение неравномерного движения Дюпюи представляет необходимое условие минимума для функционала

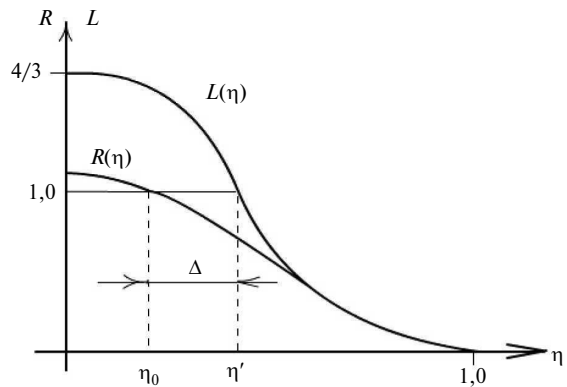


Рис. 3. Оценка глубины потока и высоты промежутка высачивания с помощью тождества (9)

$$\mathfrak{Z}(h) := \int_0^{\Xi} \left[\left(\frac{dh}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{l}{H\eta} \right)^2 \right] d\xi > 0. \quad (10)$$

Здесь $\Xi \geq \lambda$ — протяженность области фильтрации. Депрессионная воронка Дюпюи имеет наименьшую протяженность. Действительная протяженность депрессионной кривой, Ξ , как будет сейчас доказано, не меньше λ (рис. 4). Но при этом площади областей питания обязаны совпадать, т. к. прогнозируемый по Дюпюи расход точен. Это положение используется как правдоподобное допущение.

Справедливы следующие леммы:

1. В действительном движении $\delta\mathfrak{Z} = 0$, $\mathfrak{Z} \rightarrow \inf \geq 0$ (δ означает изометрическую вариацию);
2. Функционал (10) невырожден: порядок уравнения Лагранжа не ниже порядка уравнения Дюпюи для неравномерного движения.

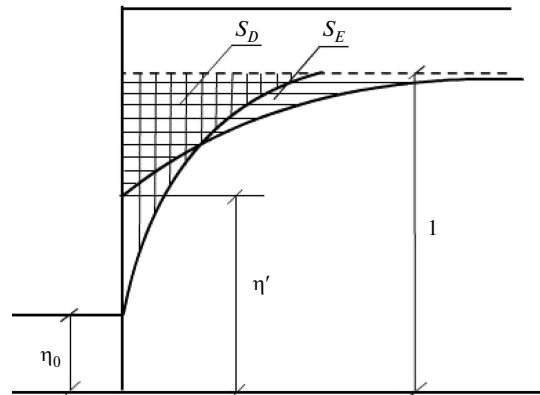


Рис. 4. Сравнение областей питания фильтрационных потоков

Уравнение Лагранжа для (10)

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = -\frac{\bar{l}^2}{\eta^3}; \quad \bar{l} = \frac{l}{H} = \frac{q}{kH} = \frac{1-\eta_0^2}{2\lambda}.$$

Порядок уравнения Лагранжа понижается на единицу подстановкой $\frac{d\eta}{d\xi} = j(\eta)$. Тогда

$$j(\eta) \frac{dj}{d\eta} + \frac{\bar{l}^2}{\eta^3} = 0. \quad (11)$$

Пусть начальное условие для уравнения (11) $j(1) = 0$. Тогда

$$j(\eta) = \frac{d\eta}{d\xi} = \bar{l} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}. \quad (12)$$

Уравнение (12) решается с начальным условием $\eta(0) - \eta' = 0$:

$$\eta = \sqrt{1 - (1 - \eta'^2) \left(1 - \frac{1 - \eta_0^2}{2\lambda\sqrt{1 - \eta'^2}} \xi \right)^2}. \quad (13)$$

Пусть в (13) $\eta = 1$. Тогда $\xi = \Xi$, $\Xi = \frac{2\lambda\sqrt{1 - \eta'^2}}{1 - \eta_0^2}$.

Очевидно, $\Xi \geq \lambda$, если

$$\eta' \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 - \eta_0^2)^2}.$$

Площадь области питания для депрессионной кривой (13) составляет

$$S_E := \int_0^{\Xi} (1 - \eta) d\xi,$$

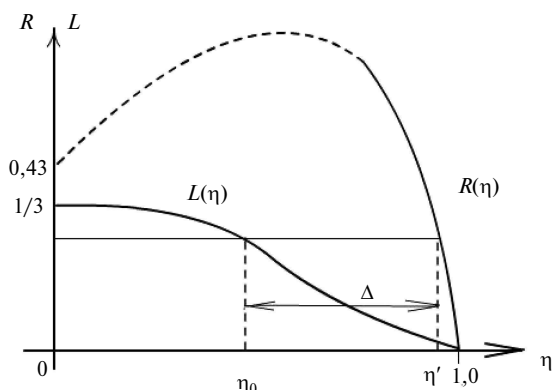


Рис. 5. Оценка глубины потока и высоты промежутка высачивания с помощью тождества (14)

или, выполнив вычисление интеграла,

$$S_E = 2\lambda \frac{\sqrt{1 - \eta'^2}}{1 - \eta_0^2} \left(1 + \frac{\eta'}{2} \frac{\arcsin \sqrt{1 - \eta'^2}}{2\sqrt{1 - \eta'^2}} \right),$$

$$0 < S_E < \lambda \frac{4 - \pi}{2}.$$

Эта площадь должна совпадать с S_D , т. е. $S_E - S_D = 0$. Получается следующее условие для определения η' :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(1 - \eta_0)^2 (1 + 2\eta_0) = \\ & = 2\sqrt{1 - \eta'^2} \left(1 + \frac{\eta'}{2} \frac{\arcsin \sqrt{1 - \eta'^2}}{2\sqrt{1 - \eta'^2}} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Уравнение (14) можно решить относительно η' и найти $\eta'(\eta_0)$ (рис. 5). На рис. 5 левая часть (14) обозначена через $L(\eta)$, правая часть (14) — через $R(\eta)$. Функция $R(\eta)$, как легко видеть, сюръективна. Для правой (монотонно убывающей ветви) $R(\eta)$ имеет единственный корень $\eta' > \eta_0$. Пусть, например, $\eta_0 = 1 - \varepsilon$; $\eta' = 1 - \delta$; $\varepsilon \ll 1$; $\delta \ll 1$. В силу (14) выполняется приближенно $\varepsilon^2 = 2\sqrt{2}\delta$, $\varepsilon = \sqrt[4]{8\delta} \gg \delta$. Тогда высота промежутка высачивания $\bar{\Delta} = \eta' - \eta_0 = \varepsilon - \delta = \sqrt[4]{\delta} (\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{\delta^3}) > 0$. Если же, наоборот, $\eta_0 = 0$, то $\eta' > 0,1$.

Предложенный способ определения депрессионной кривой притока к дренажу связан с дифференциальным уравнением Дюпюи неотрицательным функционалом (10). Для этого функционала дифференциальное уравнение Дюпюи является первым интегралом необходимого условия минимума. Наличие «лишнего» граничного условия вполне естественно для слабой (вариационной) формулировки задачи [10]. Это условие позволяет гладко сопрягать депрессионную кривую с естественным уровнем грунтовой воды, что принципиально невозможно в расчетной схеме Дюпюи. Действительно, если $dh/dx = 0$, то немедленно $v = 0$, $q = 0$.

Следовательно, интегральное условие Дюпюи на расход заменяется равенством площадей питания или влияния стока, $S_E - S_D = 0$. При этом действительная депрессионная кривая оказывается проходящей выше и положе, чем



парабола Дююи. Меньшие градиенты скорости в действительном потоке (по сравнению с решением Дююи) компенсируются большей, чем в решении Дююи, протяженностью области питания.

Предлагаемый подход, оставаясь чисто гидравлическим, не требует для вычисления элементов фильтрационного потока методов теории групп, применяемых для получения так называемых гидромеханических решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полубаринова-Кочина, П.Я.** Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. — М.: ГТТИ, 1977. 676 с.
2. **Бухарцев, В.Н.** Экстремальные задачи для фильтрационных потоков [Текст] / В.Н. Бухарцев, М.Р. Петриченко // Квалификация математика. — №757. — 2012—08—16, Saarbrücken: Palmarium academic publishing, .—2012.— 84 с.
3. **Гиргидов, А.Д.** Время понижения уровня грунтовой воды [Текст] / А.Д. Гиргидов // Инженерно-строительный журнал. — 2012.— №4.— С. 52—56.
4. **СНиП 2.06.05—84.** Плотины из грунтовых материалов.
5. **Бухарцев, В.Н.** Нестационарная фильтрация в однородном грунтовом массиве [Текст] / В.Н. Бу-

- харцев, М.Р. Петриченко // Гидротехническое строительство.— 2012.— №4.— С. 10—12.
6. **Баренблатт, Г.И.** Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика [Текст] / Г.И. Баренблатт.— М.: Либрус, 2010.— 312 с.
7. **Хейз, У.** Теория гиперзвуковых течений [Текст] / У. Хейз, Р.Ф. Пробстин.— М.: ИЛ, 1962.
8. **Петриченко, М.Р.** Расщепляющие разложения в предельных задачах для обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.Р. Петриченко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.— 2012. №2 (146).— С. 143—149.
9. **Бакельман, И.Я.** Геометрические методы решения эллиптических уравнений // И.Я. Бакельман.— М.: Наука, 1966.

REFERENCES

1. **Polubarinova — Kochina, P.Ia.** Teoriia dvizheniia gruntovykh vod [Text]. M.: GTTI, 1977, 676 s.;
2. **Bukhartsev V.N., Petrichenko M.R.** Ekstremal'nye zadachi dlia fil'tratsionnykh potokov [Tekst] // Kvalifikatsiia matematika. №757.— 2012—08—16 / Palmarium academic publishing, Saarbrücken. 2012. 84 s. (rus.)
3. **Girgidov, A.D.** Vremia ponizheniia urovnia gruntovoi vody [Tekst] // Ingenerno-stroitel'nyy jurnal.— 2012.— №4.— S. 52—56. (rus.)
4. **SNiP 2.06.05—84.** Plotiny iz gruntovykh materialov.
5. **Bukhartsev, V.N. Petrichenko, M.R.** Nestatsionarnaiia fil'tratsiia v odnorodnom gruntovom massive [Tekst] // GTS.— 2012.— №4. S. 10—12. (rus.)

6. **Barenblatt, G.I.** Podobie, avtomodel'nost' i pro-mezhutochnaia asimptotika [Tekst] // M.: Librus. 2010.— 312 s. (rus.)
7. **Kheiz U., Probstin, R.F.** Teoriia giperzvukovykh techenii [Tekst] // M.: IL, 1962, ssylka na S. 535, [2].
8. **Petrichenko, M.R.** Rasshcheplaiushchie razlozheniia v predel'nykh zadachakh dlia obyknovennykh kvazilineinykh differentsial'nykh uravnenii [Tekst] // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbG-PU. Fiz-mat. nauki.— 2012.— №2 (146).— S. 143—149. (rus.)
9. **Bakel'man, I.Ia.** Geometricheskie metody resheniia ellipticheskikh uravnenii [Tekst] // M.: Nauka, 1966.— 340 s. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ /AUTHORS

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович — доктор технических наук профессор заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета; 195251, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: fonpetrich@mail.ru
Petrichenko Mihail R. — St. Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia; e-mail: fonpetrich@mail.ru