



УДК 532.135

Д.В. Ананьев, Е.К. Вачагина, Г.Р. Халитова

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ В КОНВЕРГЕНТНОМ КАНАЛЕ

D.V. Ananyev, E.K. Vachagina, G.R. Halitova

INVESTIGATION OF HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF LAMINAR FLOW FLUID WITH TRANSVERSE VISCOSITY IN THE CONVERGENT CHANNEL

Исследуется гидродинамика при ламинарном течении водного раствора гидроксиэтилцеллюлозы, которая представляет собой нелинейно-вязкую жидкость с поперечной вязкостью, в конвергентном канале. В качестве реологической модели используется нелинейная модель, определяющая жидкость Рейнера — Ривлина.

ГИДРОДИНАМИКА. ГИДРОКСИЭТИЛЦЕЛЛЮЛОЗА. НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ. ПОПЕРЕЧНАЯ ВЯЗКОСТЬ. КОНВЕРГЕНТНЫЙ КАНАЛ. ЖИДКОСТЬ РЕЙНЕРА-РИВЛИНА.

We study the hydrodynamics in the laminar flow of an aqueous solution of hydroxyethyl cellulose, is a non-linear viscous fluid with a viscosity shear, in a convergent channel. A nonlinear rheological model defining the Reiner — Rivlin fluid is used.

HYDRODYNAMICS. HYDROXYETHYL CELLULOSE. NONLINEAR VISCOUS FLUID. TRANSVERSE VISCOSITY. CONVERGENT CHANNEL. REINER — RIVLIN FLUID.

Широкое применение реологически сложных сред в химической, нефтехимической и пищевой промышленности обуславливает возрастающий интерес к изучению гидродинамики потока в сложных каналах. К числу жидкостей Рейнера — Ривлина относятся коллоидные растворы, высокополимерные соединения, некоторые геоматериалы.

Как известно, наличие конвергентных и дивергентных частей канала позволяет значительно интенсифицировать процессы теплообмена. Наряду с другими причинами интенсификации, большое значение имеет изменение конфигурации профиля составляющих вектора скорости в соответствии с наличием нелинейно-вязких эффектов поведения жидкостей Рейнера — Ривлина. Именно наличие поперечной вязкости определяет особенности течения в каналах со сложной геометрией. И это диктует необходимость исследования течений такого рода жидкостей.

Известно множество работ, посвященных течению сред в каналах со сложной геометрией.

В работе [1] численно было исследовано полностью развитое течение внутри двумерного периодически сужающегося-расширяющегося волнистого канала с пульсирующим потоком ньютоновской жидкости. Решение задачи теплообмена при течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя непараллельными пластинами рассмотрено в [2]. Профиль скорости определяется с помощью эллиптических функций Якоби, а расчет температурных полей осуществляется численно. Аналитическое решение задачи Джеффри — Хамеля для случая скольжения на границах канала представлено в [3]. Проведено сравнение со случаем прилипания на границах.

Поведение жидкости с поперечной вязкостью при течении в каналах, имеющих сложную геометрию, имеет особенности, отличающие его от поведения ньютоновских сред. Однако в литературе практически нет работ, описывающих эти особенности. Поэтому в данной статье численно решается задача течения жидкости с поперечной вязкостью в конвергентном канале.

Постановка задачи

При построении математической модели были приняты следующие допущения:

течение среды — установившееся, ламинарное, со сформировавшимся профилем вектора скорости на входе в канал;

реологические свойства среды характеризуются наличием нелинейно-вязких эффектов;

плотность среды в ходе процесса меняется незначительно;

силы тяжести пренебрежимо малы.

Геометрическая область течения представляет собой конвергентный канал, образованный наклонными пластинами, расстояние между которыми много меньше ширины канала. Тогда можно предположить, что распределение основных гидродинамических характеристик в любом продольном сечении не меняется. Все вышесказанное позволяет свести задачу к двумерной постановке. Введем декартову систему координат, ось Ox которой направлена по оси симметрии канала в направлении течения жидкости. Продольное сечение такой геометрической области, представлено на рис. 1.

Для описания реологических свойств жидкости будем использовать нелинейную модель Рейнера — Ривлина [4, 5]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \varphi_1(I_2, T)\mathbf{B} + \varphi_2(I_2, T)\mathbf{B}^2; \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{D}; \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\text{grad}\bar{\mathbf{v}} + (\text{grad}\bar{\mathbf{v}})^T),$$

$$I_2 = 4\text{tr}(\mathbf{D}^2) = \text{tr}(\mathbf{B}^2), \quad (3)$$

где p — давление; I — единичный тензор; \mathbf{D} — тензор скоростей деформаций; $\bar{\mathbf{v}}$ — вектор скорости; $\varphi_1(I_2)$, $\varphi_2(I_2)$ — материальные функ-

ции; I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформаций; индекс « T » — символ транспонирования; « tr » — операции взятия следа тензора.

Математическая модель рассматриваемой задачи получена на основе уравнений механики сплошных сред и имеет вид

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varphi_1(I_2) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_1(I_2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) + \left(\text{div}(\varphi_2 \mathbf{B}^2) \right)_x; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_1(I_2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\varphi_1(I_2) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left(\text{div}(\varphi_2 \mathbf{B}^2) \right)_y; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

где ρ — плотность жидкости; $\left(\text{div}(\varphi_2 \mathbf{B}^2) \right)_x$ и $\left(\text{div}(\varphi_2 \mathbf{B}^2) \right)_y$ — декартовы компоненты вектора $\text{div}(\varphi_2 \mathbf{B}^2)$; v_x и v_y — компоненты вектора скорости.

Эллиптический характер используемых уравнений математической модели диктует необходимость постановки граничных условий на входе и выходе из канала. Рассмотрим вместо действительной геометрической области определения переменных задачи ($ABCD$ на рис. 1)

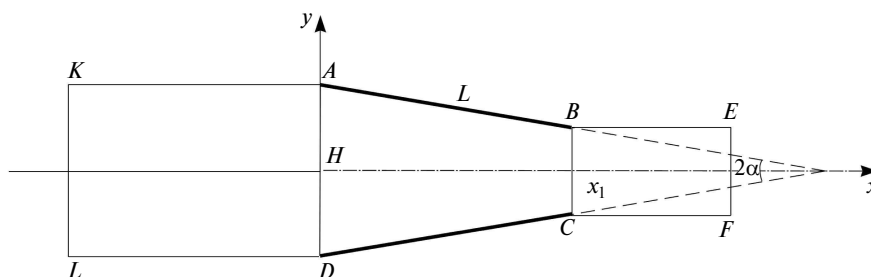


Рис. 1. Геометрическая область исследуемого конвергентного канала:

H — наибольшая высота канала; L — длина боковой поверхности канала; α — угол наклона пластин, образующих канал; x_1 — длина конвергентной части канала

видоизмененную теоретическую область, полученную из данной увеличением длины канала (плоские границы) до входа (*AK* и *DL* на рис. 1) и после выхода (*BE* и *CF* на рис. 1). Причем *BE* и *CF* имеют длину, при которой происходит стабилизация скоростных полей. На входе в канал (*LK*) задается распределение скорости, являющееся решением стационарной задачи течения в канале, образованном двумя плоскостями, расстояние между которыми равно H (H — наибольшая высота канала). На стенках принимаются гидродинамические граничные условия прилипания — $\bar{v} = 0$. На продолженных границах принимаются гидродинамические граничные условия прилипания — $\bar{v} = 0$. В качестве граничных условий на выходе (*EF*) принимаются граничные условия стабилизации искомых полей по длине: $\partial v_x / \partial x = 0$, $v_y = 0$.

Метод решения

Для решения поставленной задачи использовался метод конечных элементов, реализованный в коммерческом пакете Femlab. Разработанная модель была описана с помощью опций Femlab и введения дополнительных членов, связанных с наличием поперечной вязкости, что привело к созданию новой пользовательской модели в рамках программы Femlab. Для решения задач гидродинамики при течении жидкости с поперечной вязкостью использовались нелинейные элементы. Метод решения применяемой программы основан на использовании интегральных соотношений метода Бубнова — Галёркина.

Тестирование метода решения проводилось путем сравнения результатов решения задачи течения гидроксипропилцеллюлозы в цилиндрическом канале квадратного поперечного сечения, полученного в [6] В.Г. Литвиновым и в данной работе (рис. 2). Разница между распределением продольной составляющей вектора скорости v_z на половине диагонали квадрата, которое получено В.Г. Литвиновым (кривая 1), и распределением, которое получено методом, использованным в данной работе (кривая 2), составляет не более 4 %.

Также было проведено сравнение результатов решения задачи течения ньютоновской жидкости в конвергентном канале из работы [7] с решением, которое получено с использованием

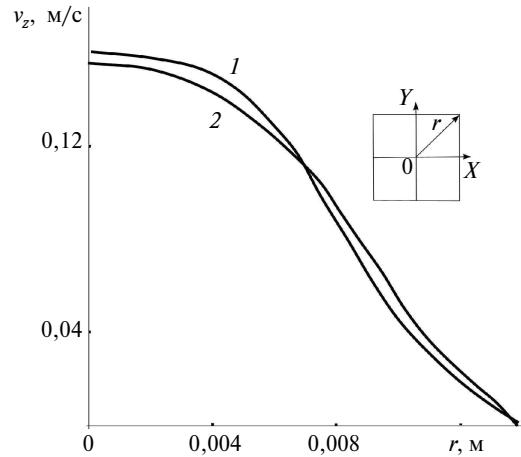


Рис. 2. Распределения v_z : 1 — получено В.Г. Литвиновым, 2 — получено авторами данной работы

программного пакета Femlab (рис. 3, б). Рассматривалось течение воды в конвергентном канале ($\alpha = 0,01$). Схема течения и расположение осей цилиндрической системы координат задачи, рассмотренной в [7], изображены на рис. 3. Кривая 1 на рис. 3, б — из работы [7], кривая 2 — решение, полученное с помощью программного пакета Femlab.

Результаты

Для численных расчетов был выбран водный раствор гидроксипропилцеллюлозы, эффективная и поперечная вязкость которой определяются следующим образом [6]:

$$\begin{cases} \varphi_1(I_2) = 2 & \text{при } 0 \leq \sqrt{I_2/2} \leq 4; \\ \varphi_1(I_2) = \frac{4}{\sqrt[4]{I_2/2}} & \text{при } 4 < \sqrt{I_2/2} \leq 10^3; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi_2(I_2) = -0,32 & \text{при } 0 \leq \sqrt{I_2/2} \leq 1; \\ \varphi_2(I_2) = \frac{-0,32}{(I_2/2)^{3/4}} & \text{при } 1 < \sqrt{I_2/2} \leq \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Конвергентный канал можно однозначно определить, задав угол α наклона плоскостей, образующих канал, длину плоскостей L и расстояние H между плоскостями на входе в канал (рис. 1). Как следует из уравнений вязкости (7), (8), гидродинамическая картина течения жидкости с поперечной вязкостью в конвергентном канале зависит от изменения вектора скорости.

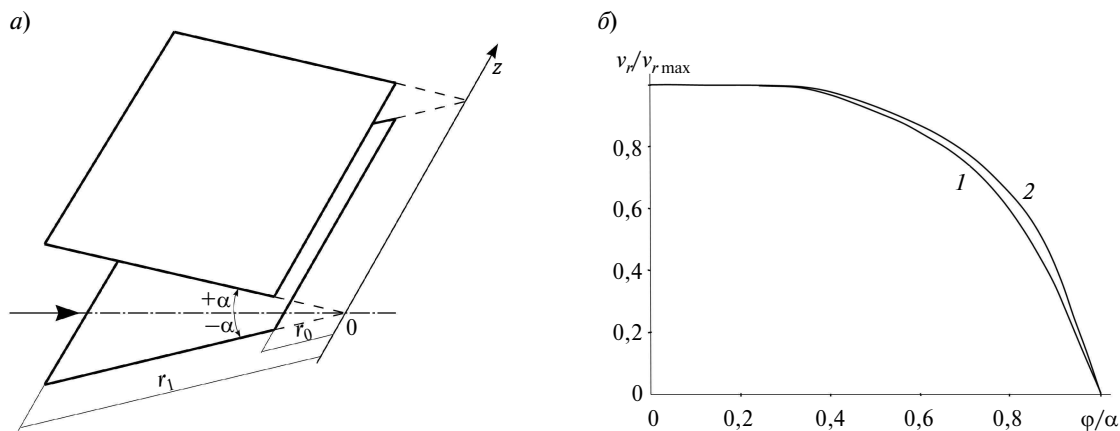


Рис. 3. Схема течения, принятая в [7], (а) и распределения $v_r/v_{r,max}$ (б):
 v_r — радиальная составляющая вектора скорости; $v_{r,max}$ — ее максимальное значение

Распределение составляющих вектора скорости представлено на рис. 4. Расчет был проведен для канала со следующими геометрическими характеристиками: $\alpha = 0,2$; $H/L = 0,8$. Режим течения определялся расходом, равным $0,029 \text{ м}^2/\text{с}$, что соответствовало значению числа $Re = 57$ на входе в канал, т. е. в самой широкой части канала.

Из рис. 4 видно, что наибольшие абсолютные величины максимумов поперечной и продольной составляющих вектора скорости — в узкой части канала.

Изменение второго инварианта тензора скоростей деформации, от которого явно зависят эффективная и поперечная вязкости, представ-

лено на рис. 5, а. Распределения I_2 показывают, что изменение I_2 в узкой части канала (кривая 1) характеризуется наибольшим значением I_2 на границе, а дальше монотонно убывает до нуля на оси симметрии канала.

Распределение функции ϕ_2 в поперечном сечении канала представлено на рис. 5, б. Из рисунка видно, что абсолютное значение поперечной вязкости изменяется от своего наибольшего значения в центре канала до наименьшего на границе, при этом в узкой части наименьшее значение ϕ_2 меньше, чем в более широкой части, что обусловлено более высоким значением I_2 (кривая 1).

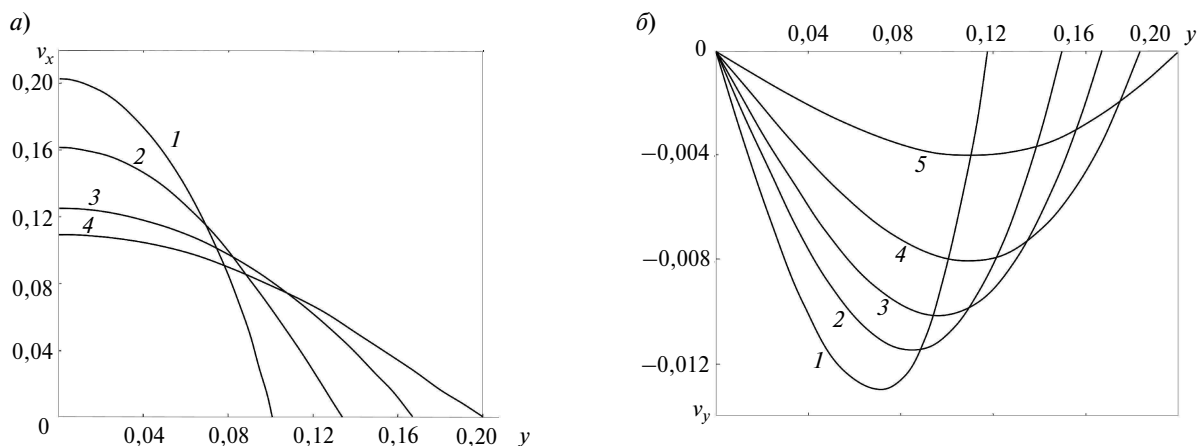


Рис. 4. Распределение составляющих v_x (а) и v_y (б) вектора скорости в поперечном сечении канала:

- а) 1 — $x = x_1$; 2 — $x = 2x_1/3$; 3 — $x = x_1/3$; 4 — $x = 0$;
 б) 1 — $x = 5x_1/6$; 2 — $x = 2x_1/3$; 3 — $x = x_1/2$; 4 — $x = x_1/3$; 5 — $x = x_1/6$

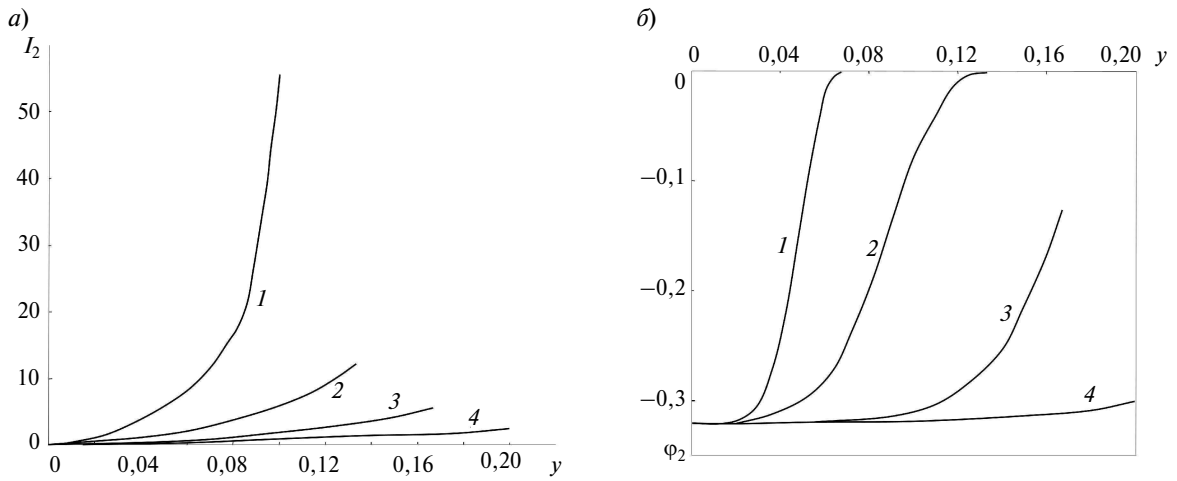


Рис. 5. Распределение второго инварианта I_2 тензора скоростей деформации (а) и поперечной вязкости φ_2 (б) в поперечном сечении канала: 1 — $x = x_1$; 2 — $x = 2x_1/3$; 3 — $x = x_1/3$; 4 — $x = 0$

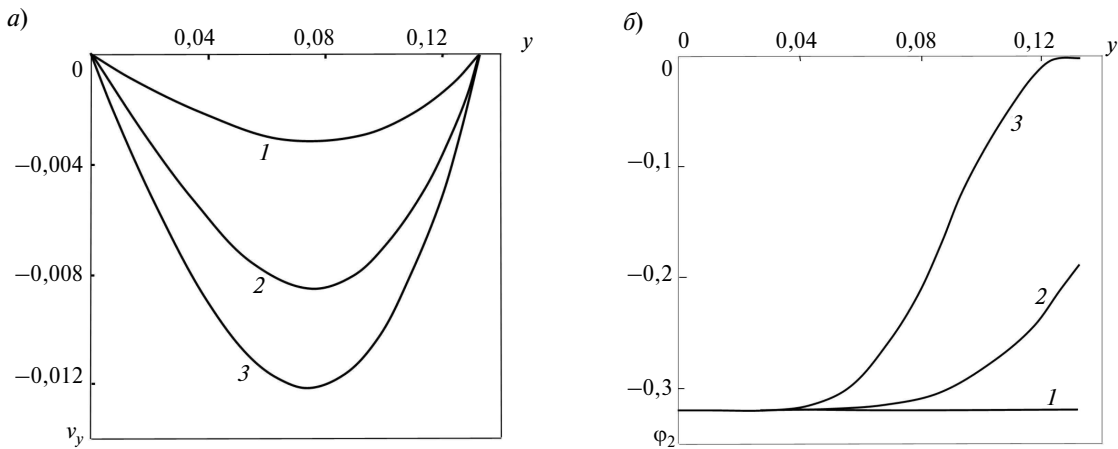


Рис. 6. Распределение поперечной составляющей вектора скорости (а) и поперечной вязкости (б) при $x = 2x_1/3$ в зависимости от числа Re: 1 — Re = 15; 2 — Re = 38; 3 — Re = 57

На рис. 6, а представлено распределение поперечной составляющей скорости в поперечном сечении канала при $x = 2x_1/3$ в зависимости от числа Re. Как видно, с увеличением числа Re происходит рост поперечной составляющей скорости. Расчеты проведены для канала со следующими геометрическими характеристиками: $\alpha = 0,2$; $L = 0,5$; $H/L = 0,8$.

Режим течения, на который существенное влияние оказывает расход, определяет в конечном итоге изменение поперечной вязкости, что представлено на рис. 6, б. При увеличении числа Рейнольдса происходит уменьшение абсо-

лютного значения поперечной вязкости, что также обусловлено увеличением величины I_2 вблизи границы канала с увеличением Re и псевдопластичными свойствами рассматриваемой жидкости.

Представленные результаты численных расчетов позволяют описать особенности течения, возникающие из-за наличия поперечной вязкости и различных размеров конвергентного канала.

Характер течения жидкости с поперечной вязкостью существенно зависит от геометриче-

ских параметров конвергентного канала, а также гидродинамического режима, определяемого числом Re . При увеличении числа Рейнольдса происходит рост поперечной составляющей вектора скорости. С увеличением угла наклона растет абсолютное значение составляющих вектора

скорости. Абсолютное значение поперечной вязкости уменьшается с уменьшением отношения H/L .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Академии наук РФ (грант № 12–08–97034-р_поволжье_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gong-Nan Xie.** Heat transfer enhancement inside converging-diverging wavy channel by pulsating flow [Текст] / Xie Gong-Nan, Wang Qiu-Wang, Zeng Min [et al.] // Journal of Chemical Engineering of Chinese Universities.— 2006.— Vol. 20, № 1.— P. 31–35
2. **Millsapst, K.** Thermal Distributions in Jeffery-Hamel Flows Between Nonparallel Plane Walls [Текст] / K. Millsapst, K. Pohlhausent // Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences.— Vol. 20, Is. 3.
3. **Dorrepaal, J.M.** Slip flow in converging and diverging channels [Текст] / J.M. Dorrepaal // Journal of Engineering Mathematics.— 1993.— Vol. 27.— P. 343–356.
4. **Брутян, М.А.** Гидродинамика неньютоновских

- жидкостей [Текст] / М.А. Брутян, П.Л. Крапивский // Итоги науки и техники. Сер.: Комплексные и специальные разделы механики.— М.: ВИНТИ, 1991.— Т. 4.— С. 3–98.
5. **Astarita, G.** Principles of non-newtonianfluid mechanics / G. Astarita, G. Marrucci.— McGRAW-HILL, 1974.— 309 p.
6. **Литвинов, В.Г.** Движение нелинейно-вязкой жидкости [Текст] / В.Г. Литвинов.— М.: Наука, 1982.— 374 с
7. **Vachagina, E.K.** Fourier method for heat transport equation in the convergent channel [Текст] / E.K. Vachagina, D.V. Ananyev // International Journal of Heat and Mass Transfer.— 2013.— Vol. 57.— P 148–154.

REFERENCES

1. **Xie Gong-Nan.** Heat transfer enhancement inside converging-diverging wavy channel by pulsating flow [Текст] / Xie Gong-Nan, Wang Qiu-Wang, Zeng Min [et al.] // Journal of Chemical Engineering of Chinese Universities.— 2006.— Vol. 20, № 1.— P. 31–35.
2. **Millsapst, K.** Thermal Distributions in Jeffery-Hamel Flows Between Nonparallel Plane Walls [Текст] / K. Millsapst, K. Pohlhausent // Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences.— Vol. 20, Is. 3.
3. **Dorrepaal, J.M.** Slip flow in converging and diverging channels [Text] / J.M. Dorrepaal // Journal of Engineering Mathematics.— 1993.— Vol. 27.— P. 343–356.

4. **Brutian, M.A.** Gidrodinamika nen'itonoovskikh zhidkosti [Tekst] / M.A. Brutian, P.L. Krapivskii // Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Kompleksnye i spetsial'nye razdely mekhaniki.— М.: VINITI, 1991.— Т. 4.— С. 3–98. (rus.)
5. **Astarita, Dzh.** Osnovy gidromekhaniki nen'itonoovskikh zhidkosti [Text] / Dzh. Astarita, Dzh. Maruchchi.— М.: Mir, 1978.— 309 s.
6. **Litvinov, V.G.** Dvizhenie nelineino-viazkoi zhidkosti [Tekst] / V.G. Litvinov.— М.: Nauka, 1982.— 374 s. (rus.)
7. **Vachagina, E.K.** Fourier method for heat transport equation in the convergent channel [Tekst] / E.K. Vachagina, D.V. Ananyev // International Journal of Heat and Mass Transfer.— 2013.— Vol. 57.— P. 148–154.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ /AUTHORS

АНАНЬЕВ Дмитрий Владиславович — кандидат технических наук научный сотрудник лаборатории ТФИ Исследовательского центра проблем энергетики Казанского научного центра Российской академии наук; 420111, ул. Лобачевского, 2/31, Казань, Россия; e-mail: dima211083@yandex.ru
ANANYEV Dmitry V. — Research Center of Power Engineering Problems of RAS Institution of the Kazan Scientific Centre of RAS; 420111, P.B. 190, 2/31 Lobachevsky str., Kazan, 420111, Russia; e-mail: dima211083@yandex.ru

ВАЧАГИНА Екатерина Константиновна — доктор технических наук заведующая лабораторией ТФИ Исследовательского центра проблем энергетики Казанского научного центра Российской академии наук; 420111, ул. Лобачевского, 2/31, Казань, Россия; e-mail: evachagina@mail.ru

VACHAGINA Ekaterina K. — Research Center of Power Engineering Problems of RAS Institution of the Kazan Scientific Centre of RAS; 420111, P.B. 190, 2/31 Lobachevsky str., Kazan, 420111, Russia; e-mail: evachagina@mail.ru

ХАЛИТОВА Галия Рахимовна — старший научный сотрудник ЭТПИЭ Исследовательского центра проблем энергетики Казанского научного центра Российской академии наук; 420111, ул. Лобачевского, 2/31, Казань, Россия; e-mail: halitova-galia@mail.ru

HALITOVA Galia R. — Research Center of Power Engineering Problems of RAS Institution of the Kazan Scientific Centre of RAS; 420111, P.B. 190, 2/31 Lobachevsky str., Kazan, 420111, Russia; e-mail: halitova-galia@mail.ru