



# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 621.312.8

*А.И. Федотов, С.К. Лисин*

## **СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖИМОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

*A.I. Fedotov, S.K. Lisin*

### **SYNTHESIS OF THE NONLINEARITY PARAMETER MODE MEASURING SYSTEMS**

Рассматриваются вопросы синтеза нелинейных режимов измерительных систем, применяемых для контроля параметров и механических свойств различных изделий технического назначения. Исследованы математические модели, используемые для оценки и синтеза параметров нелинейных режимов (в том числе перемещений и отклонений длин) объектов. При этом оцениваемые параметры являются параметрами численно решаемой системы уравнений, устанавливающих связь между амплитудой, смещением центра колебаний и фазовым параметром измерительной системы.

МОДЕЛИ. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. КОНТРОЛЬ ПАРАМЕТРОВ.

The problems of the synthesis of non-linear modes of measurement systems used to control the parameters and mechanical properties of different products. A mathematical model used to estimate the parameters of nonlinear modes (including motion and abnormalities of the lengths) of objects. In this case, the estimated parameters are parameters of the numerical solution of equations relating the amplitude, offset, and phase fluctuations parameter measurement system.

MODELS. NONLINEAR MODES. NUMERICAL METHODS. MEASURING OFF SYSTEMS. CONTROL OF PARAMETERS.

Для повышения эффективности контроля геометрических параметров и свойств неподвижных и движущихся изделий актуально использовать средства измерений, реализующие режимы периодического взаимодействия динамической системы с исследуемым объектом. Соответственно появилась необходимость исследования и прогнозирования динамических режимов [1, 2], способствующих повышению эффективности измерительных подвижных и других систем.

Использование средств измерений контактного типа целесообразно для контроля неподвижных или движущихся со сравнительно невысокой скоростью изделий. Процесс измерения

в подобных случаях происходит при непосредственном контакте измерительного наконечника с поверхностью объекта контроля. При этом образование интенсивных режимов в измерительных цепях таких механизмов приводит к появлению зазоров, к преждевременной потере метрологической точности и снижению ресурса средств измерений.

Создание более эффективных средств контактного контроля связано с необходимостью проведения синтеза элементной структуры на основе адекватного моделирования режимов подвижных систем. Расчетные процедуры, направленные на повышение точности и обеспе-

чение защиты элементов механизмов, сводятся к динамическому анализу и синтезу измерительных механизмов.

Исследования, связанные с разработкой и освоением различных по своей физической природе нелинейных измерительных систем, оказывают непосредственное влияние на развитие и совершенствование техники измерения [3] процессов нелинейных колебаний. В большинстве случаев практическое освоение вибрационных процессов становилось возможным лишь после их детального изучения и теоретического описания. Использование подвижных систем, подвергнутых динамическому анализу и синтезу оптимальных параметров, позволяет существенным образом расширить области применения подобных средств измерений.

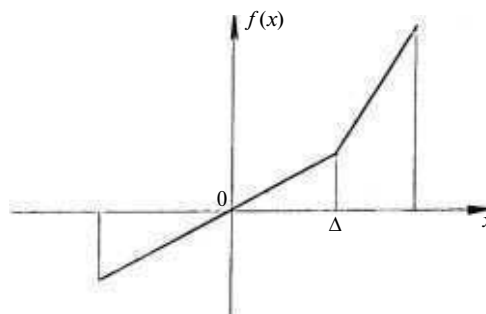
Виброконтактные измерительные устройства реализуют периодические режимы с низкими частотами механических колебаний и могут использоваться для контроля геометрических параметров неподвижных и движущихся изделий [4, 5]. Одномерный виброконтактный преобразователь содержит измерительный наконечник, мультивибратор и высокочувствительную генераторную систему [5]. Динамическая характеристика подвижной системы виброконтактного генераторного преобразователя — нелинейна в силу существенного различия жесткости упругого подвеса измерительного органа в зоне и вне зоны его контакта с поверхностью контролируемого изделия.

Построение математической модели — наиболее ответственная часть исследования нелинейного колебательного процесса, так как включает в себя выбор базового метода решения и в ряде случаев обоснование целесообразности его применения. При этом к вопросам предварительного анализа математической модели относятся анализ свойств функции (непрерывность, нечетность, четность, симметричность), выражающей динамическую характеристику самого процесса, и сопоставление ее с функцией решения выбираемого метода.

Уравнение вынужденных колебаний виброконтактной подвижной системы с односторонней упругой характеристикой имеет вид

$$\ddot{\zeta} + f(\zeta) = \eta \cos \xi \tau, \quad (1)$$

где  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\tau$  — соответственно амплитуда возбуждения колебаний, частота возмущающей силы (коэффициент расстройки), безразмерное время.



Билинейная характеристика

При этом выражение несимметричной упругой характеристики (см. рис.) при односторонней упругой связи имеет вид

$$f(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{при } \zeta \leq 1; \\ 1 + \chi^2(\zeta - 1) & \text{при } \zeta \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\zeta$  — безразмерная координата перемещения измерительного стержня;  $\chi$  — относительная жесткость,  $\chi^2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1}$ ;  $x$  — координата, отсчитываемая от положения равновесия;  $m$  — масса измерительного стержня;  $C_1$ ,  $C_2$  — жесткости упругого подвеса и измеряемого тела;  $\Delta$  — зазор между измеряемой поверхностью и равновесным положением измерительного стержня.

В соответствии с методом гармонического баланса решение уравнения (1) записывается в виде

$$\zeta = s_0 + s \cos \psi, \quad (3)$$

где  $s_0$  и  $s$  — смещение центра и амплитуда колебаний вибрационной подвижной системы;  $\psi = \xi \tau$  при  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

Выбор метода решения поставленной задачи должен осуществляться с учетом свойств функции упругой связи и возбуждения подвижной системы. В результате подстановки выражения (3) и значений коэффициентов линеаризации упругой характеристики  $f(\zeta)$  в (1) получим соотношения

$$f_0 = 0; \quad (4)$$

$$\eta = f_1 - \alpha \xi^2. \quad (5)$$

Уравнение  $\zeta(\psi_1) = 1$ , соответствующее положению узловой точки кусочно-линейной характеристики, принимает вид

$$s_0 + s \cos \psi_1 = 1. \quad (6)$$

Система трансцендентных уравнений для определения искомым переменных  $s_0$ ,  $s$  и  $\psi_1$  методом гармонического баланса — следующая:

$$s_0 = \frac{1}{1 - \pi / (\chi^2 - 1)(\text{tg } \psi_1 - \psi_1)}; \quad (7)$$

$$s = \eta / \left| 1 + (\chi^2 - 1)(\psi_1 - 0,5 \sin 2\psi_1) / \pi - \xi^2 \right|; \quad (8)$$

$$s \cos \psi_1 = 1 - s_0. \quad (9)$$

Уравнение (9) характеризует амплитуду колебаний  $s$  и представляет ее значение, соответствующее координате узловой точки билинейной характеристики, обеспечивая тем самым замкнутость математической модели. В рассматриваемом случае нелинейная система (7)–(9) устанавливает аналитическую зависимость  $\alpha(\xi)$ . Данная расчетная модель может применяться для исследования процессов взаимодействия измерительного наконечника с упругими и пористыми изделиями, которые описываются динамическими характеристиками ограниченной жесткости [6].

Выразим параметр жесткости в виде функционала

$$\chi^2 = \left( \frac{\eta}{s} - c_1 \right) \frac{1}{c_2(\psi_1)} + 1, \quad (10)$$

где

$$c_1 = 1 - \xi^2; \quad c_2(\psi_1) = \frac{\psi_1 - 0,5 \sin 2\psi_1}{\pi};$$

$\psi_1$  — соответствует безразмерному времени контактирования измерительного наконечника с поверхностью объекта контроля.

Для обоснования и установления метода виброконтрастного измерения жесткости необходимо получить прямую зависимость жесткости от параметра  $s_0$ , который характеризует изменение амплитуды выходного сигнала преобразователя при изменении физико-механических свойств контролируемых объектов. При фиксированных значениях  $\eta$  и  $\xi$  искомым является функция  $\chi(s_0)$ .

В общем случае жесткость  $\chi$  — это функция величин  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\psi_1$ ,  $\alpha_0$ . Среди них параметр  $\alpha_0$  непосредственно находят по показаниям преобразователя. Следовательно, неопределенность этого параметра носит характер статистической погрешности и определяется через среднее квадратическое отклонение [7]. В процессе анализа результата измерений может возникнуть необ-

ходимость учета имеющих место погрешностей. По определению погрешность есть разность между результатом измерений и истинным (действительным) значением величины.

При проведении повторяемых опытов апостериорная информация характеризуется статистической составляющей погрешности в виде стандартного отклонения. С учетом того, что повторяемые опыты могут содержать случайную и систематическую погрешности [8, 9], необходимо рассмотреть их статистические эквиваленты — неопределенности. Форма представления неопределенности типа среднее квадратическое отклонения (СКО) обусловлена правилами анализа случайных величин, в данном случае правилами анализа результатов повторяемых измерений. Результаты многократных измерений используют, чтобы определить закон распределения вероятностей измерений. В качестве меры неопределенности типа СКО выбирают ее оценку — стандартное отклонение измеряемой величины.

Параметры  $\eta$ ,  $\xi$  устанавливаются, а их неопределенности носят характер систематической погрешности. Неопределенность фазового параметра  $\psi_1$  контролируется специальными средствами. Общая неопределенность искомого значения  $\chi$  получается по правилу получения неопределенности косвенных измерений.

Модель среднего квадратического отклонения  $s_\chi$  при независимой статистической связи переменных и функций рассматриваемой математической модели имеет вид

$$s_\chi = \sqrt{\left( \frac{\partial \chi}{\partial \xi} s_\xi \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} s_\eta \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_0} s_{\alpha_0} \right)^2}. \quad (11)$$

Выражение (11) позволяет установить неопределенность оценки жесткости  $\chi$ , являющейся параметром численно решаемой нелинейной системы. Совокупность, включающая (7–10), служит аналитической основой измерений жесткости в режимах периодического виброконтраста измерительного наконечника с исследуемым объектом. Так как параметры  $\eta$ ,  $\xi$  устанавливаются, то неопределенности точности их установки носят характер систематических погрешностей этих измеряемых величин. Неопределенность фазового параметра  $\psi_1$ , контролируемого специальными средствами, вычисляется так же, как для случая однократного измерения по градуированной шкале с учетом класса точности прибора.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов, Н.Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
2. Вибрации в технике. Защита от вибраций и ударов [Текст]: Справочник. Т.6, / Под ред. К.В.Фролова. — М.: Машиностроение, 1981. — 456 с.
3. **Козлов, В.Н.** Децентрализованная стабилизация параметрических возмущенных крупномасштабных систем [Текст] / В.Н. Козлов, В.Н. Шашихин // Научно-технические ведомости СПбГТУ. — 1996. № 1. — С. 62–65.
4. **Федотов, А.И.** Теория измерений [Текст] / А.И. Федотов, С.К. Лисин, Г.С. Морокина. — СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2013. — 325 с.
5. **Патент РФ Ru– 2016374 с1.** Виброконттактный преобразователь для линейных измерений [Текст] / Б.А. Глаговский [и др.]. — Оpubл. 15.07.94. — Бюлл. 1994. № 13.
6. **Лисин, С.К.** Использование теории переноса ошибок при оценке параметров нелинейных систем [Текст] / С.К. Лисин, А.И. Федотов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2009. № 3(84). — С. 184–187.
7. **Лисин, С.К.** Технические измерения [Текст]: Учебное пособие / С.К. Лисин, А.И. Федотов. — СПб.: Изд-во НМСУ «Горный», 2012. — 66 с.
8. **Солопченко, Г.Н.** Метрология, стандартизация, сертификация. Основы законодательной и прикладной метрологии [Текст]: учебное пособие / Г.Н. Солопченко. — СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2012. — 203 с.
9. **Шишкин, И.Ф.** Теоретическая метрология. Ч.1. Общая теория измерений [Текст]: учеб-метод. комплекс. Учебное пособие / И.Ф. Шишкин — 3-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. — 189 с.

## REFERENCES

1. **Bogoliubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.** Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy [Tekst]. — M.: Nauka, 1974. — 504 s. (rus.)
2. Vibratsii v tekhnike. Zashchita ot vibratsii i udarov [Tekst]: Spravochnik T.6, / Pod red. K.V.Frolova. — M.: Mashinostroenie, 1981. — 456 s. (rus.)
3. **Kozlov V.N., Shashikhin V.N.** Detsentralizovannaia stabilizatsiia parametricheskikh vozmushchennykh krupnomasshtabnykh system [Tekst] // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGTU. — 1996. № 1. — S. 62–65. (rus.)
4. **Fedotov A.I., Lisin S.K., Morokina G.S.** Teoriia izmerenii [Tekst]. — SPb.: Izd-vo Politekh. un-ta, 2013. — 325 s. (rus.)
5. **Patent RF Ru– 2016374 s1.** Vibrokontaktnyi preobrazovatel' dlia lineinykh izmerenii [Tekst] / B.A. Glagovskii [i dr.]. — Opubl. 15.07.94. — Biull. 1994. № 13. (rus.)
6. **Lisin S.K., Fedotov A.I.** Ispol'zovanie teorii perenosa oshibok pri otsenke parametrov nelineinykh system [Tekst] // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. — 2009. № 3(84). — S. 181–184. (rus.)
7. **Lisin S.K., Fedotov A.I.** Tekhnicheskie izmereniia: uchebnoe posobie [Tekst]. — SPb.: Izd-vo NMSU «Gornyi», 2012. — 66 s. (rus.)
8. **Solopchenko G.N.** Metrologiia, standartizatsiia, sertifikatsiia. Osnovy zakonodatel'noi i prikladnoi metrologii: uchebnoe posobie [Tekst] / G.N. Solopchenko. — SPb.: Izd-vo Politekh. un-ta, 2012. — 203 s. (rus.)
9. **Shishkin I.F.** Teoreticheskaiia metrologiia. Ch.1. Obshchaia teoriia izmerenii: ucheb-metod. kompleks: uchebnoe posobie [Tekst] / — 3-e izd., pererab. i dop. — SPb.: Izd-vo SZTU, 2008. — 189 s. (rus.)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ФЕДОТОВ Алексей Иванович** — доктор технических наук профессор заместитель председателя попечительского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета; президент Санкт-Петербургской инженерной академии; 195251, ул. Политехническая д.29, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ps@spbstu.ru

**ЛИСИН Сергей Кузьмич** — кандидат технических наук доцент НМСУ «Горный»; 199106, Васильевский остров, 21 линия, дом 2, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: lisinsk1@mail.ru

## AUTHORS

**FEDOTOV Aleksei I.** — St. Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnikheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia; e-mail: ps@spbstu.ru

**LISIN Sergei K.** — National mineral resources university; 199106, Vasil'evskii ostrov, 21 liniya, 2, St. Petersburg, St. Petersburg, Russia; lisinsk1@mail.ru