УДК 517.929

А.Ф. Зубова, В.И. Зубов,
И.В. Зубов, С.А. Стрекопытов

ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ

A.F. Zubova, V.I. Zubov,
I.V. Zubov, S.A. Strecopitov

THE TECHNOLOGY OF BUILDING SIMPLE QUADRATE SYSTEMS

Рассмотрен способ приведения трехмерной системы дифференциальных уравнений к одному уравнению второго порядка. Проведено исследование простых по структуре дифференциальных уравнений. Разработана технология построения простых квадратичных систем, обладающих предельными свойствами, важными в задачах управления.

СИСТЕМА. МНОЖЕСТВО. УРАВНЕНИЕ. ПОРЯДОК. ФУНКЦИЯ. ПЕРИОД. РЕШЕНИЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ. РЕЖИМ. ВЕКТОР.

In giving article is looks the way of bring third quadrate system of differential equations to one equation of second order. Is bring investigation simple on structure differential equation, is works technology of building simple quadrate systems, is possesses giving limiting measures, important in the tasks of controlling.

SYSTEM. MULTITUDE. EQUATION. ORDER. FUNCTION. PERIOD. SOLUTION. STABILITY. REGIME. VECTOR.

Системы дифференциальных уравнений — необходимый математический аппарат описания динамических процессов. Поэтому задачи современной автоматики, т. е. задачи создания новых эффективных систем управления различными технологическими комплексами и техническими объектами, обусловливают развитие методов исследования линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений — обыкновенных и в частных производных, которые описывают динамику функционирования систем автоматического управления. Задачи управления на протяжении последних десятилетий были основными «потребителями» достижений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории нелинейных колебаний. Задача прогнозирования поведения моделируемых систем сводится в количественном плане к численному интегрированию уравнений динамики, а в качественном плане — к аналитическому исследованию структурных особенностей моделируемой системы (наличие инвариантных множеств, характер предельного поведения решений).

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= x + z + xz; \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \qquad (1)$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = \frac{1}{2}x^2 + C$, где $C = \text{const}$. В связи с этим систему (1) можно привести к одному уравнению второго порядка

$$\dot{x} = C + (1+C)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \qquad (2)$$

Умножим обе части (2) на $\dot{x}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. Получим

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = C_1 + Cx + \frac{1}{2}(1+C)x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \\ + \frac{1}{8}x^4 \quad (C_1 = \text{const}). \qquad (3)$$

Извлечем квадратный корень и проинтегрируем снова; получим

$$\int \frac{4}{\sqrt{2C_1 + 2Cx + (1+C)x^2 + x^3/3 + x^4/4}} = t + C_2, \quad (4)$$

где $C_2 = \text{const}$.

Интеграл, стоящий в левой части (4), — гиперэллиптический [1]. Для гиперэллиптических функций, появляющихся при обращении этого интеграла, когда мы хотим явно выписать решение $x(t)$ системы (1), характерно наличие нескольких периодов, которые зависят от начальных данных. Рассмотрим еще одну систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= xz + a; \\ \dot{z} &= 4xy + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = 2x^2 + t + c$, что позволяет привести (5) к уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = 2x^3 + (t+C)x + a. \quad (6)$$

С помощью подстановки $x = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(t+C)$ это уравнение приводится к нормальному виду Пенлеве [2]:

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha. \quad (7)$$

Пенлеве показал, что решения уравнения (7) описываются принципиально новыми трансцендентными функциями, которые не сводятся к ранее изученным; они получили название *трансцендентных функций Пенлеве* [3]. Ученик Пенлеве Ж. Шази (1882–1955) изучал, в частности, уравнение

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2, \quad (8)$$

к которому приводится квадратичная система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 2xz - 3y^2.$$

Шази установил, что интеграл столь простого по виду уравнения имеет весьма сложные особенности и связан с интегралами гипергеометрического уравнения и функциями Шварца. Приведенные примеры показывают, что решения систем дифференциальных уравнений простой структуры могут иметь чрезвычайно сложную аналитическую природу. «Простота» структуры квадратичных систем, описывающих системы со странными аттракторами, также указывает на это. В практических задачах построения уравнений управляемого движения наиболее важно требование их аналитической простоты. Это связано с возможностью их инженерной реализации. Поэтому необходима разработка технологии построения «простых» (например, квадратичных) систем, обладающих заданными предельными свойствами, существенными для задач управления. Важнейшим таким свойством является наличие автоколебания или совокупности автоколебаний (аттрактор), имеющих заданный или желаемый диаметр. Практически это означает, что построенная управляемая система будет иметь предельный режим с заданной геометрической характеристикой, т. е. фазовые переменные окажутся в желаемых пределах. Как осуществить такое построение? Основным методическим приемом в теории управляемых систем является решение обратной задачи механики, когда по заданным кинематическим элементам движения строятся уравнения динамики системы. Такими кинематическими элементами могут быть заданная траектория или заданная совокупность траекторий (инвариантное множество). Решение обратной задачи механики в полном объеме, по-видимому, впервые было осуществлено И. Ньютоном при открытии закона всемирного тяготения. Н.П. Еругин решил эту задачу в случае заданной интегральной кривой (заданного первого или частного интеграла).

Теорема 1. (Н.П. Еругин). Для того чтобы система дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X) \quad (9)$$

имела частный интеграл $V(X) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы правая часть системы (9) имела следующий вид:

$$F = \nabla V M(V, X) + N(X),$$

где $(\nabla V, N(X)) = 0$, $M(0, X) \equiv 0$. Причем, если поверхность $V(X) = 0$ не имеет точек покоя, то векторная функция $N(X)$ не должна обращаться в нуль-вектор на этой поверхности.

Можно задать желаемое предельное множество в виде замкнутой гладкой компактной поверхности и построить семейство дифференциальных уравнений, имеющих ее в качестве интегральной. Можно построить и такие системы, для которых данная интегральная поверхность будет асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством. Другой вопрос состоит в том, насколько будут просты получаемые уравнения? Ведь даже задавая поверхность в виде эллипсоида, получаем уравнения, не являющиеся простыми. Кроме того, данный класс уравнений ограничен интегрируемым по определению случаем. Поэтому возникает желание использовать и неинтегрируемые системы для построения компактных, простых для инженерной реализации управляемых систем, которые будут иметь заданные геометрические характеристики предельного режима. Однако аналитическая природа решений такой системы может быть весьма сложной. Пусть $V(X), W(X)$ — положительно определенные функции, обладающие свойствами

$$V(X_1)=0, \quad W(X_2)=0, \quad V,W \to \infty$$

при $\| X \| \to \infty$. Пусть на решениях некоторой гипотетической системы дифференциальных уравнений, имеющей продолжаемые решения, а также нулевое решение

$$\dot{X} = F(X) , \tag{10}$$

выполнено соотношение

$$\dot{V} = -W .$$

Тогда из теоремы Ляпунова об устойчивости следует, что система (10) имеет асимптотически устойчивое в целом положение равновесия $X = 0$. Пусть V,W суть заданные функции с вышеупомянутыми свойствами. Рассмотрим уравнение

$$\nabla V \cdot F = W . \tag{12}$$

Это уравнение определяет класс систем (10), на решениях которых выполнено соотношение (11). Часть решений этого уравнения определяют системы с продолжаемыми решениями. Именно эти решения и интересны в практическом, инженерном смысле. Выбирая из этих решений системы в некотором смысле «простого» вида, мы получаем множество интересующих нас систем. Рассмотрим теперь следующее уравнение, выполненное на решениях гипотетической системы (10):

$$\dot{V} = -W + C, \tag{13}$$

где C = const.

Поскольку все решения (10) продолжаемы, то необходимо, чтобы выполнялось условие $C \geq 0$. Система (10) в этом случае равномерно диссипативна и будет иметь компактный предельный режим — автоколебание или совокупность автоколебаний (аттрактор). По уравнению (13) при заданных функциях V,W и контакте C можно построить все дифференциальные системы, на решениях которых выполняется это соотношение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,z); \\ \dot{y} &= g(x,y,z); \\ \dot{z} &= h(x,y,z). \end{aligned} \tag{14}$$

Предположим, что у системы (14) существует стационарный интеграл

$$v(x,y,z) = c , \tag{15}$$

где c = const. Функция (15) удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$v_x f + v_y g + v_z h = 0 .$$

Иными словами, вектор $\mathrm{grad}(v) = (v_x, v_y, v_z) = \nabla v$ ортогонален вектору (f,g,h). Следовательно, вектор ∇v лежит в подпространстве, ортогональном вектору $f = (f,g,h)$. В качестве базиса этого подпространства можно взять, например, такие векторы:

$$g_1 = (g-h,\ h-f,\ f-g);$$

$$g_2 = (g(f-g) - h(h-f), \quad h(g-h) - f(f-g),$$

$$f(h-f) - g(g-h)) .$$

Имеем

$$(f,g_1)=0; (f,g_2)=0; (g_1,g_2)=0; g_2 = f \cdot g_1.$$

По нашему предположению имеем

$$\nabla v = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 ,$$

где μ_1, μ_2 — скалярные функции независимых переменных x, y, z. Если функция v представима в виде $v = v_1 + v_2$, так что выполнено соотношение $\nabla v = \nabla v_1 + \nabla v_2$, а векторы $\nabla v_1, \nabla v_2$ коллинеарны соответственно векторам g_1, g_2, то справедливы следующие рассуждения. По нашему предположению, функция (15) существует, следовательно, хотя бы при одном из i = 1, 2 имеет нетривиальное решение система уравнений

$$1\nabla v_i = \mu g_i\,, \qquad (16)$$

где $\mu = \mu\,(x, y, z)$ — некоторая скалярная функция. Выпишем условия интегрируемости уравнений (16) для $i = 1$:

$$\mu_y(g-h)+\mu(g_y-h_y)=\mu_x(h-f)+\mu(h_x-f_x)\,,$$

$$\mu_z(g-h)+\mu(g_z-h_z)=\mu_x(f-g)+\mu(f_x-g_x)\,,$$

$$\mu_z(h-f)+\mu(h_z-f_z)=\mu_y(f-g)+\mu(f_y-g_y)\,.$$

Последнюю систему можно записать в матрично-векторной форме:

$$\mathrm{A}_1\nabla\mu = \mu F_1\,. \qquad (17)$$

Матрица A_1 и вектор F_1 в выражениях (17) определены вполне:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} -(h-f) & g-h & 0 \\ -(f-g) & 0 & g-h \\ 0 & -(f-g) & h-f \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{F}_1 = \begin{pmatrix} h_x - f_x - (g_y - h_y) \\ f_x - g_x - (g_z - h_z) \\ f_y - g_y - (h_z - f_z) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A_1 в силу своей структуры является вырожденной при любых f, g, h. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнения (17) возможно лишь тогда, когда вектор F лежит в подпространстве, натянутом на столбцы матрицы А:

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, F).$$

Нетривиальным решением для нас будет также ситуация, когда $F_1 = 0$, при этом получается $\mu(x,y,z) = \mathrm{const}$ $\mu\,(x, y, z) = \mathrm{const}$. При $i = 2$ получаем следующие значения для матрицы А и вектора F:

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} -h(g-h)+f(f-g) & g(f-g)-h(h-f) & 0 \\ -f9h-f)+g(g-h) & 0 & g(f-g)-h(h-f) \\ 0 & -f(h-f)+g(g-h) & g(f-g)-f(f-g) \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{F}_2[1] = f_x(g-3f) - f_y(g+h) + g_x(h+f) -$$
$$-g_y(f-2g) + h_x(g-2h) + h_y(2h-f);$$

$$\mathrm{F}_2[2] = f_x(h-2f) - f_z(g+h) + g_x(h-2g) +$$
$$+g_z(2g-f) + h_x(f+g) + h_z(2h-f);$$

$$\mathrm{F}_3[3] = f_z(2f-g) + f_y(h-2f) - g_z(h+f) -$$
$$-g_y(2g-2h) + h_z(2h-g) + h_y(f+g).$$

Матрица A_2 также вырожденная, и решение возможно тоже не всегда. Таким образом, в невырожденных случаях система дифференциальных уравнений для функций μ_1, μ_2 выглядит следующим образом:

$$\mathrm{A}_1\nabla\mu_1 + \mathrm{A}_2\nabla\mu_2 = \mu_1\mathrm{F}_1 + \mu_2\mathrm{F}_2\,. \qquad (18)$$

Это — система трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций. Для ее исследования заметим сначала, что, поскольку матрицы A_1, A_2 вырожденные, уравнения (18) не могут быть разрешены относительно всех трех производных μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} или μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, но в общем случае система (18) может быть разрешена относительно двух производных, например по x, y:

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial x} = a(x,y,z)\mu_1 + \mathrm{A}(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z});$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial y} = b(x,y,z)\mu_1 + \mathrm{B}(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}). \qquad (19)$$

Здесь А, В — линейные функции по μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}. Дифференцируя первое уравнение по y, а второе по x, получаем

$$(a_y - b_x)\mu_1 = L[\mu_2]\,, \qquad (20)$$

где

$$L[\mu_2] = -\left(a\mathrm{B} - b\mathrm{A} + \frac{d\mathrm{A}}{dx} - \frac{d\mathrm{B}}{dy}\right)$$

— дифференциальный оператор второго порядка. Р. Курант [5] показал, что в аналитическом случае условие

$$a_y = b_x \qquad (21)$$

является необходимым и достаточным для разрешимости системы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Необходимым условием существования стационарного интеграла для системы (18) является выполнение условий (21).

В самом общем случае приведем систему (9) к следующему виду: члены, содержащие величины μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, перенесем в правую часть, а содержащие величины μ_1, μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} — в левую. Введем новые неизвестные величины: $\alpha_1(x,y,z)$; $\alpha_2(x,y,z)$; $\alpha_3(x,y,z)$. Получим соотношения

$$A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 = \alpha_1;$$

$$A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 = \alpha_2;$$

$$A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 = \alpha_3;$$

$$A_2[1,1]\mu_{2_x} + A_2[1,2]\mu_{2_y} + F_2[1]\mu_2 = \alpha_1;$$

$$A_2[2,1]\mu_{2_x} + A_2[2,3]\mu_{2_z} + F_2[2]\mu_2 = \alpha_2;$$

$$A_2[3,2]\mu_{2_y} + A_1[3,3]\mu_{2_z} + F_1[3]\mu_2 = \alpha_3. \quad (22)$$

Мы получили две группы уравнений: первую — для неизвестной функции μ_1, вторую — от μ_2. В теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка такие уравнения называются *общими линейными* [4], или *линейными неоднородными* [3]. Не ограничивая общности, рассмотрим первые три уравнения (22):

$$X_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 - \alpha_1 = 0;$$

$$X_2(\mu_1) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 - \alpha_2 = 0;$$

$$X_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 - \alpha_3 = 0. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$\bar{X}_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y};$$

$$\bar{X}_2(\mu_2) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z};$$

$$\bar{X}_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z}.$$

Поскольку матрица A_1 вырожденная, из системы (23) невозможно найти величины μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z}. Приведем систему (23) к замкнутой форме. В общем случае можно взять два линейно независимых по μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} уравнения, например X_1, X_2, и составить скобку Якоби:

$$[X_1, X_2] = A_1[1,1]\left(\frac{\partial X_2}{\partial x} + \mu_{1_x} F_1[2]\right) -$$

$$-A_1[2,1]\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mu_1 F_1[1]\right) +$$

$$+A_1[1,2]\left(\frac{\partial X_2}{\partial y} + \mu_{1_y} F_1[2]\right) -$$

$$-A_1[2,3]\left(\frac{\partial X_1}{\partial z} + \mu_{1_z} F_1[2]\right).$$

Известно [1, 2], что $[X_1, X_2] = \bar{X}_1(X_2(\mu_1)) - -\bar{X}_2(X_1(\mu_1))$. Может оказаться так, что получившееся уравнение линейно независимо с уравнениями X_1, X_2, тогда получившуюся систему можно разрешить относительно μ_1.

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, которые имеют несколько неустойчивых положений равновесия, но геометрически локализованное заданным образом ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути, это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа таких предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае неосуществимо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10–08–000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авдеева, М.Б.** Последовательная локализация инвариантных множеств [Текст] / М.Б. Авдеева, С.В. Зубов, И.С. Стрекопытов.— Дифференциальные уравнения. Известия Российской академии наук.— Рязань: Изд-во Рязанского гос. университета, 2012.— Т. 17.— С. 9–12.

2. **Зубов, А.В.** Трехмерные квадратичные системы [Текст] / А.В. Зубов, К.А. Пешехонов, С.А. Стрекопытов, М.В. Стрекопытова // Диффенренциальные уравнения. Известия Российской академии наук.— Рязань: Изд-во Рязанского гос. университета, 2012. Т. 17.— С. 13–16.

3. **Зубов, И.В.** Уравнение для регулярного интеграла [Текст] / И.В. Зубов, А.Ф. Зубова, А.И. Иванов // Дифференциальные уравнения. Известия Российской академии наук.— Рязань. Изд-во Рязанского гос. университета.— 2012. Т. 17.— С. 17–20.

4. **Зубов, А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] / А.В. Зубов, С.В. Зубов.— АООТ «Мобильность-плюс».— СПб., 2012.— 357 с.

5. **Зубов, А.В.** Управление динамическими системами [Текст] / А.В. Зубов, О.А. Шабурова.— СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2005.— 83 с.

6. **Зубов, С.В.** Качественный анализ систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] / С.В. Зубов.— СПб: ВВМ, 2014.— 114 с.

7. **Зубов, И.В.** Анализ систем управления и способы представления программных управлений [Текст] / И.В. Зубов.— СПб.: ВВМ, 2014.— 150 с.

8. **Зубова, О.А.** Анализ равновесных движений и задача идентификации [Текст] / О.А. Зубова, М.В. Стрекопытова.— СПб.: СПбГУ, 2013.— 256 с.

REFERENCES

1. **Avdeeva M.B., Zubov S.V., Strekopytov I.S.** Posledovatel'naia lokalizatsiia invariantnykh mnozhestv [Tekst] // Differentsial'nye uravneniia. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk.— Riazan', Riazanskii gos. universitet, 2012. T. 17.— S. 9–12. (rus.)

2. **Zubov A.V., Peshekhonov K.A., Strekopytov S.A., Strekopytova M.V.** Trekhmernye kvadratichnye sistemy [Tekst] // Diffenrentsial'nye uravneniia, Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk.— Riazan': Riazanskii gos. universitet, 2012. T. 17.— S. 13–16. (rus.)

3. **Zubov I.V., Zubova A.F., Ivanov A.I.** Uravnenie dlia reguliarnogo integrala [Tekst] // Differentsial'nye uravneniia. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk.— Riazan': Riazanskii gos. universitet, 2012. T. 17.— S. 17–20. (rus.)

4. **Zubov A.V., Zubov S.V.** Matematicheskie metody kachestvennogo analiza sistem upravleniia i ustoichivost' raschetnykh dvizhenii [Tekst].— SPb.: AOOT «Mobil'nost'-plius».— 2012. (rus.)

5. **Zubov A.V., Shaburova O.A.** Upravlenie dinamicheskimi sistemami [Tekst].— SPb.: Izd-vo NII Khimii SPbGU, 2005.— 83 s. (rus.)

6. **Zubov S.V.** Kachestvennyi analiz sistem upravleniia i ustoichivost' raschetnykh dvizhenii [Tekst].— SPb: Izd-vo VVM, 2014.— 114 s. (rus.)

7. **Zubov I.V.** Analiz sistem upravleniia i sposoby predstavleniia programmnykh upravlenii [Tekst].— SPb.: Izd-vo VVM, 2014.— 150 s. (rus.)

8. **Zubova O.A., Strekopytova M.V.** Analiz ravnovesnykh dvizhenii i zadacha identifikatsii [Tekst].— SPb.: Izd-vo SPbGU, 2013.— 256 s. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ЗУБОВА Александра Федоровна — доктор технических наук профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 191024, ул. Конная, д. 22, кв. 4, г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ddemidova@mail.ru

ЗУБОВ Всеволод Иванович — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 191024, ул. Конная, д. 22, кв. 4, г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ddemidova@mail.ru

ЗУБОВ Иван Владимирович — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета; 191024, ул. Конная, д. 22, кв. 4, г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ddemidova@mail.ru

СТРЕКОПЫТОВ Сергей Александрович — аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики — процессов управления; Санкт-Петербургского государственного университета; 191024, ул. Конная, д. 22, кв. 4, г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: ddemidova@mail.ru

AUTHORS

ZUBOVA Alexandra F. — St. Petersburg State University; 191024, Connay st., 22/5, f. 4, St. Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

ZUBOV Vsevolod I. — St. Petersburg State University; 191024, Connay st., 22/5, f. 4, St. Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

ZUBOV Ivan V. — St. Petersburg State University; 191024, Connay st., 22/5, f. 4, St. Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru

STRECOPITOV Sergei A. — St. Petersburg State University; 191024, Connay st., 22/5, f. 4, St. Petersburg, Russia; e-mail: ddemidova@mail.ru