



УДК 532

*Д.В. Немова, В.Я. Ольшевский, Д.Н. Цейтин*

## ГИДРОСТАТИКА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

*D.V. Nemova, V.Ya. Olshevskiy, D.N. Tseytin*

## HYDROSTATICS OF HEAT-GRAVITATIONAL CONVECTION IN THE VERTICAL CHANNEL

Восходящее вверх свободно-конвективное движение подогреваемого воздуха вдоль горячей плоскости (стены) навесного фасада сопровождается фильтрацией холодного воздуха сквозь адиабатную поверхность экрана. Холодный и горячий потоки воздуха разнонаправлены, что способствует уменьшению потерь теплоты от горячей стены.

ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ВЕНТИЛИРУЕМЫЙ КАНАЛ. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПОДЪЕМНОЙ (АРХИМЕДОВОЙ) СИЛЫ. ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. ЧИСЛА ПОДОБИЯ.

Free and convective flow of warmed-up air ascending up along the hot plane (wall) of a curtain wall systems is accompanied by a filtration of cold air through an adiabatic surface of the screen. Cold and hot streams of air are multidirectional that promotes reduction of losses of warmth from a hot wall.

HEAT-GRAVITATIONAL CONVECTION. THE VERTICAL VENTILATED CHANNEL. BOUNDARY LAYER OF UPTHURST (ARCHIMEDEAN FORCE). SEPARATION OF THE BOUNDARY LAYER. SIMILARITY NUMBER.

### Постановка задач

Рассматривается стилизованная схема вентилируемого зазора между «горячей» плоскостью  $y=0$  (с температурой  $T_h$ ) и холодной адиабатной плоскостью  $y=h$  (с температурой  $T_c$ ). Высота щели равна  $L$ , причем  $L \gg h$  (рис. 1).

Холодная адиабатная плоскость  $y=h$  не герметична и допускает фильтрацию «холодного» воздуха извне и горячего воздуха из щели.

Возникают следующие задачи:

1. Найти условия, при которых возможна фильтрация холодного воздуха в щелевой зазор через негерметичности адиабатной плоскости  $y=h$  и обратная фильтрация горячего воздуха из вентилируемого зазора.

2. Найти расход горячего и холодного воздуха в вентилируемом зазоре.

Первая задача (в связи с инфильтрацией воздуха сквозь ограждающие конструкции) рассматривалась в диссертации Д.В. Петросовой [1]. В этой работе утверждается, что при наличии градиента давления на ограждении происходит фильтрация воздуха из помещения наружу, на «подветренную» сторону, и внутрь, с «навстрелен-

ной» стороны. При этом изотермическая фильтрация воздуха принципиально невозможна и, вообще говоря, изотермический закон Дарси (Дюпюи) выполняется, только если показатель  $n$  политропы в фильтрационном течении много больше единицы [2].

Вторая задача связана с расчетом расхода в горячей пристеночной струе при наличии спутного потока холодного воздуха. При отсутствии спут-

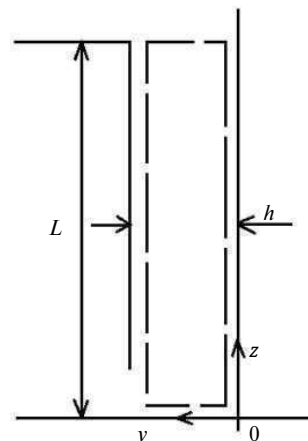


Рис. 1. Расчетная схема зазора

ного потока и инфильтрации воздуха из щели (непроницаемая адиабатная плоскость  $y = h$ ) расход рассчитан в работе М.В. Петроченко [3] и уточнен с учетом переменности плотности по длине потока в [4]. Гидравлика термогравитационной конвекции с переменным по длине расходом, насколько известно, не изучалась [5–10].

### Пьезометрическая линия для вертикальной щели

Пусть распределение давления по высоте щели — гидростатическое, газ (воздух) — баротропен, показатель политропы равен  $s$ . Тогда из решения уравнения гидростатического равновесия Эйлера следует

$$\pi_s(Z) = \left(1 - \frac{s-1}{s} Z\right)^{\frac{s}{s-1}} = 1 - Z + \frac{Z^2}{2s}, \quad (1)$$

где  $\pi := \frac{p}{p_0} \in \left[\frac{p_L}{p_0}, 1\right]$ ;  $Z := \frac{gz}{RT_0} \in [0, \Lambda]$ ;  $\Lambda := \frac{gL}{RT_0}$ ;  $p_0$  — давление на отметке  $z = 0$ ;  $p_L$  — давление на отметке  $z = L$ ;  $Z = \Lambda$ .

В силу (1)  $\pi_s(Z)$  — монотонно убывающая функция значка  $s$ . Например, при баротропном движении воздуха с подогревом показатель политропы  $n$  меньше показателя адиабаты  $k$ . Поэтому линия давления для политропного равновесия в координатах  $p, z$  ( $\pi, Z$ ) проходит правее линии адиабатного равновесия (рис. 2).

Точно так же техническая работа в баротропном движении с  $n < k$  больше технической работы при адиабатном движении с  $n = k$  (рис. 3).

Профицит технической работы отображает превышение работы архимедовой подъемной силы над работой силы тяжести.

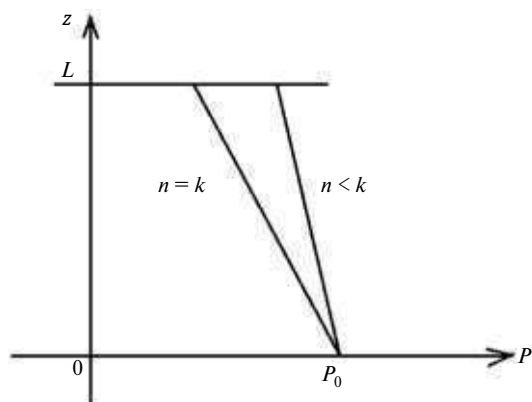


Рис. 2. Распределение давления по высоте адиабатного и политропного столба воздуха

Возможны следующие конфигурации пьезометрической линии при баротропном движении воздуха в вертикальной щели:

1. Схема «равновесного» течения в условиях полного штиля (рис. 4).

На входе в щель преодолевается местное тепловое сопротивление, и падение давления в сечении  $z = 0$  ( $Z = 0$ ) составляет  $\pi_n(\Lambda) - \pi_k(\Lambda)$ . Пьезометрическая линия восходящего потока в щели описывается зависимостью

$$\pi(Z) = \pi_n(Z) - \pi_n(\Lambda) + \pi_k(\Lambda),$$

причем  $\pi(\Lambda) - \pi_k(\Lambda) = 0$ , т. е. давление на выходе из щели такое же, как и в атмосфере на отметке  $z = L$ . Перепад давления между атмосферным воздухом и вертикальной щелью распределяется по высоте щели так:

$$\begin{aligned} \Delta\pi(Z) &:= \pi_k(Z) - \pi(Z) = \\ &= \pi_k(Z) - \pi_n(Z) + \pi_n(\Lambda) - \pi_k(\Lambda) = \\ &= \frac{\Lambda^2 - Z^2}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

2. В условиях п.1, т. е. равновесного движения, фасадный экран (адиабатная плоскость  $y = h$ ) находится на наветренной стороне (рис. 5, а) или на подветренной стороне (рис. 5, в).

В первом случае величина перепада давления на экране увеличится за счет скоростной добавки  $\pi_{v+} = \frac{\rho v_\infty^2}{2p_0}$ , во втором случае — уменьшится на величину, пропорциональную скоростной добавке. Для построения эпюры избыточного

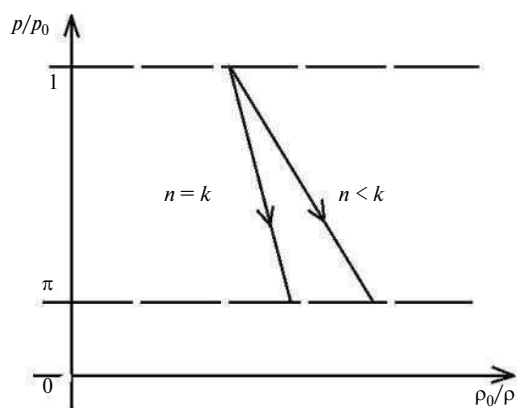


Рис. 3. Техническая работа адиабатного и политропного потоков

давления необходимо знать распределение ветрового напора по высоте фасада. Следовательно, если давление под ветром ниже давления в щелевом канале, происходит фильтрация горячего воздуха наружу. На наветренной стороне приток холодного воздуха в вентилируемый зазор больше притока холодного воздуха при полном штиле.

3. Замороженная схема течения предполагает не скачкообразную (разрывную) релаксацию давления, а непрерывное изменение давления, показанное на рис.6.

Схема, представленная на рис. 6, предполагает существования участка с негидростатическим распределением давления по ходу потока (этот участок пьезометрической линии показан пунктиром).

Из сказанного следует, что аналитическая оценка притока холодного воздуха в щель возможна для схемы п. 1. В этом случае величина скорости  $v_{ex}$  притока холодного воздуха в вентилируемую щель может быть найдена из формулы истечения

$$\begin{aligned} \Delta\pi(Z) &= \frac{\rho v_{ex}^2}{2\varphi_{ex}^2 p_0} = \pi_k^{\frac{1}{k}}(Z) \frac{\rho_0 v_{ex}^2}{2\varphi_{ex}^2 p_0} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k} Z\right) \frac{\rho_0 v_{ex}^2}{2\varphi_{ex}^2 p_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_{ex}$  — коэффициент скорости щели. С учетом (2) равенство (3) приводит к следующему значе-

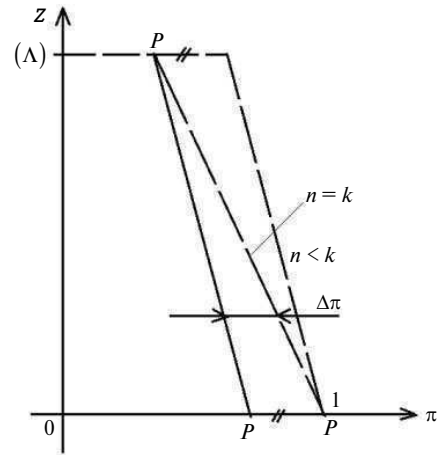


Рис. 4. Пьезометрическая линия для условий полного штиля

нию скорости затекания холодного воздуха в вентилируемый зазор:

$$v_{ex} = \varphi_{ex} \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right) RT_0} \sqrt{\frac{\Lambda^2 - Z^2}{1 - \frac{Z}{k}}}. \quad (4)$$

В силу (4) величина расхода холодного воздуха через щель  $0 \leq Z_i < Z < Z_{i+1} \leq L$  составит

$$\Delta q_{exi} = \frac{RT_0}{g} \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} v_{ex} dZ, \quad (5)$$

а суммарный расход воздуха находится суммированием (5) по всем щелям ( $Z_i, Z_{i+1}$ ).

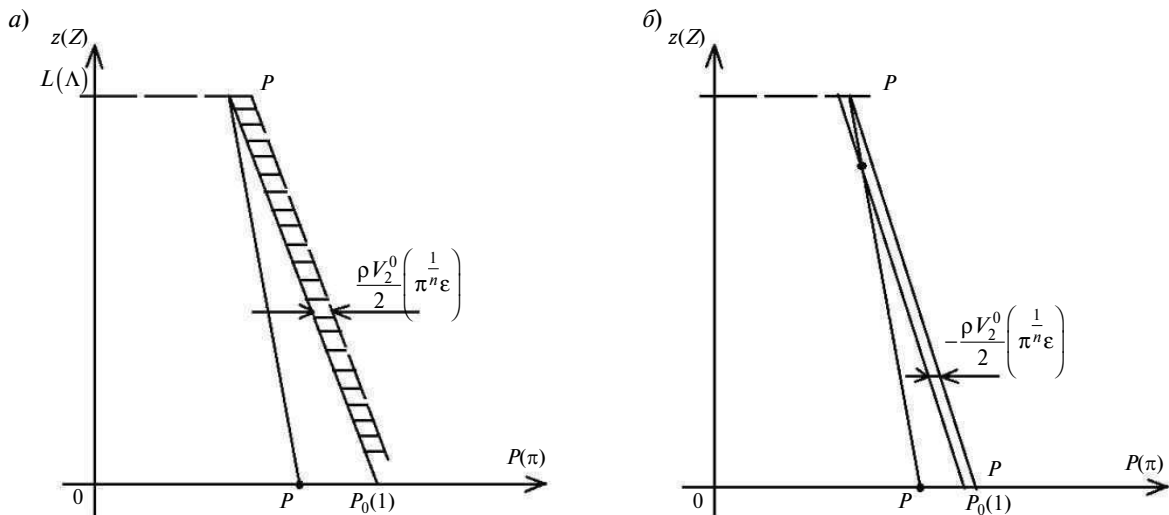


Рис. 5. Пьезометрическая линия зазора наветренной (а) и подветренной (б) стороны

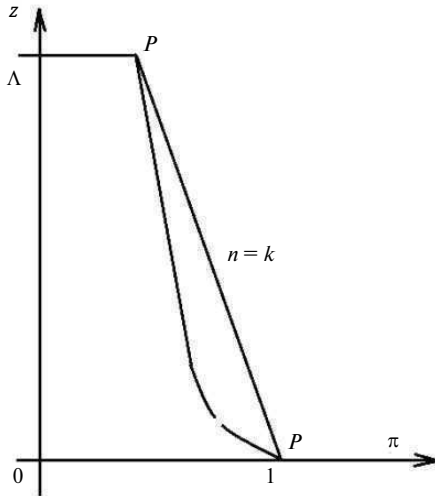


Рис. 6. Пьезометрическая линия для движения с большими входными потерями

Итак, пусть известен расход (инфильтрация)  $q_{ex}$  холодного воздуха в вентилируемую щель. Расход горячего воздуха сквозь вентилируемую щель  $q_{in} = v\delta(z)$ , где  $v$  — средняя скорость воздуха в щели,  $\delta$  — толщина пограничного слоя подъемной силы,  $\delta(z) = \sqrt[4]{\frac{4v^2z}{g}}$ . Суммарный расход горячей и холодной струй в вентилируемом зазоре равен  $q = q_{in} - q_{ex}$ . Тогда справедливо следующее утверждение: координата  $Z_{lim}$  сечения вентилируемой щели, отвечающая нулевому значению расхода ( $q = 0$ ), удовлетворяет условию

$$\sqrt[4]{Z_{lim}^3} = \frac{\varphi}{\varphi_{ex}} \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{R}}} \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda}}, \quad (6)$$

где  $\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{gL^3}}{v}$  — нечто вроде комбинации чисел Фруда и Рейнольдса;  $\varphi$  — коэффициент расхода вентилируемой щели.

Пусть  $Z_{lim} = \Lambda$ . Тогда предельное значение относительной высоты вентилируемого зазора, удовлетворяющее условию положительности расхода  $q$  смеси холодной и горячей струй, в силу (6) равно

$$\Lambda_{lim} = \frac{\varphi}{\varphi_{ex}} \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{R}}}. \quad (6_1)$$

Отсюда

$$\sqrt[4]{L_{lim}^7} = \sqrt{2v} \frac{\varphi}{\varphi_{ex}} \frac{RT_0}{\sqrt[4]{g^5}}. \quad (7)$$

Значение высоты вентилируемого пространства  $L_{lim}$  называется предельным, т.к. на отметках  $Z > L_{lim}$  восходящий вверх поток подогретого воздуха сменяется падающим потоком холодного воздуха. На отметке  $Z = L_{lim}$  суммарный расход горячей и холодной струй равен нулю. Предельная длина уменьшается вместе с  $T_0$  и возрастает с увеличением вязкости воздуха. Влияние отношения скоростных коэффициентов на предельную высоту вентилируемой щели очевидно.

### Качественная структура восходящего потока в вентилируемом пространстве

Результаты предыдущего пункта могут быть уточнены, а именно: вне гидравлического анализа остается поведение горячего настильного факела при наличии попутного и (или) спутного потока. Для низкорейнольдсовой модели турбулентности

$$R_h = \frac{vh}{v} = O(\sqrt{G_h}); \quad G_h = \frac{gh^3}{v^2} \frac{2(T_h - T_c)}{T_h + T_c};$$

$$G_h = O(10^6 - 10^7)$$

уравнения импульсов и энергии могут быть записаны в виде

$$f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \theta = 0; \quad \theta'' + 3\sigma f\theta' = 0, \quad (8)$$

где  $f = f(\zeta)$  — безразмерная функция тока,  $f(\zeta) = v \frac{\Psi(y, z)}{g\delta^3}$ ;  $\theta(\zeta) = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \in [0, 1]$  — безразмерный температурный напор;  $\sigma$  — число

Прандтля;  $\zeta = \frac{y}{\delta(z)}$ ;  $\delta(\zeta) = \sqrt[4]{\frac{4v^2z}{g}}$ ;  $\zeta \in [0, \infty)$ .

При существовании спутного течения предельные условия для системы (8) имеют вид

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) - \beta = \theta(0) - 1 = \theta(\infty) = 0, \quad (9)$$

где  $u_z(\infty, z) = \frac{g\delta^3}{v} \beta$ , т. е.  $\beta$  — безразмерная скорость на внешней границе настильного факела. При  $\beta = 0$  предельная задача решена Польгаузеном. Решение в виде расщепляющего ряда приводится в [5].

Формулируем окончательные результаты:

1) асимптотическое ( $\zeta \gg 1$ ) выражение для безразмерной функции тока есть

$$f(\zeta) \cong \beta\zeta + a + O(\zeta \exp(-3a\zeta)),$$

причем параметр  $a = f(\infty) - \beta\zeta$  задает масштаб толщины пограничного слоя и расхода горячего воздуха через пограничный слой;

2) постоянные  $a$  и  $\beta$  связаны тождеством

$$a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{\beta^2}{36}} - \frac{\beta}{6}}.$$

Распределения скорости в сечении вертикального вентилируемого зазора для попутного и для встречного потоков приводятся на рис. 7;

3) для существования пристеночного пограничного слоя на горячей грани необходимо выполнение неравенства  $\beta \geq -\frac{1}{9a^2} = \beta_s$ , где  $\beta_s$  — отрывное значение параметра спутности  $\beta$ . Если  $\beta = \beta_s$ , то пограничный слой сорван встречным потоком. Пусть  $\beta = \beta_s$ . Тогда  $a = \sqrt{\frac{2}{27}}$ ,  $\beta_s = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $f''(0) = 0$ ;

4) разность  $\omega = a + \beta \left( \frac{h}{\delta(z)} - 1 \right)$  пропорциональна расходу горячего ( $a$ ) и холодного воздуха. Заменяем  $\beta$  на  $-\beta$ . Тогда для существования восходящего потока в вентилируемой щели необходимо  $a \geq \beta \left( \frac{h}{\delta} - 1 \right)$ . Или, учитывая п. 2,

$$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{\beta^2}{36}} + \frac{\beta}{6}} \geq \beta \left( \frac{h}{\delta} - 1 \right),$$

и далее

$$m^4 \beta^4 - m^2 \frac{\beta^3}{3} \leq \frac{1}{27},$$

где  $m = h/\delta - 1$ . Ясно, что в тонком пограничном слое ( $m \gg 1$ ) обнуление расхода произойдет при значении параметра спутности  $\beta \ll 1$ , т. е. вначале произойдет обнуление расхода, а срыв по-

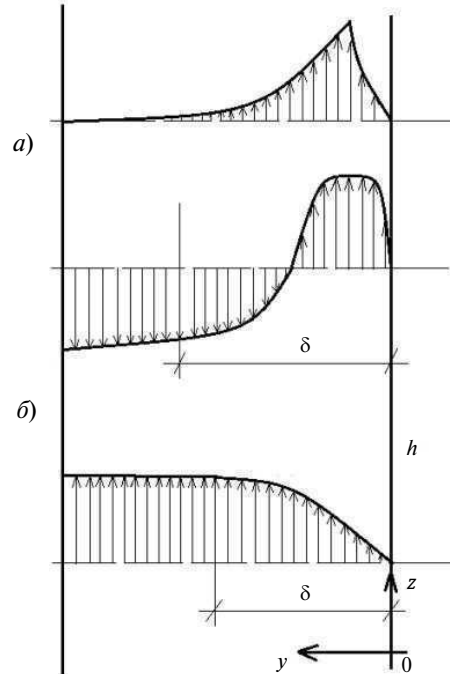


Рис. 7. Эпюра скорости в вертикальном зазоре для движений с переменным по длине расходом

граничного слоя еще не произойдет. Вообще легко доказать, что обнуление расхода происходит независимо от того, произошел или не произошел отрыв пограничного слоя на горячей грани вентилируемого зазора. Например, если  $m = 1$  ( $h/\delta = 2$ ),  $\beta = \beta_s = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . В этом случае

$$\omega_s = \sqrt{\frac{3}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}} = 0,03349 > 0 = 0,03349 > 0,$$

т. е. обнуления расхода еще не происходит и смесь холодного и горячего воздуха в среднем движется снизу вверх. Очевидно, если параметр спутности

удовлетворяет условию  $\beta^4 - \frac{\beta^3}{3} - \frac{1}{27} = 0$ , то произойдет обнуление расхода. Положительное решение этого уравнения  $\beta = 0,552 > \beta_s$  показывает, что обнуление расхода происходит при больших значениях параметра спутности, чем отрыв пограничного слоя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросова, Д.В. Неизотермическая фильтрация воздуха через ограждающие конструкции замкнутых помещений [Текст]: Автореферат дисс. к.т.н. / Д.В. Петросова.— 05.23.16, СПбГПУ.— 2012.— 21 с.

2. Петриченко, М.Р. Термодинамические тождества и уравнения неизотермической фильтрации в изотропной пористой среде [Текст] / М.Р. Петриченко // Научно-технические ведомости СПбГПУ.—

2013. № 2(171).— С. 188–192.

3. **Петриченко, М.Р.** Достаточные условия существования свободноконвективного течения в вертикальном щелевом канале [Текст] / М.Р. Петриченко, М.В. Петроченко // Научно-технические ведомости СПбГПУ.— 2012. № 2-2(147).— С. 276–282.

4. **Немова, Д.В.** Интегральные характеристики термогравитационной конвекции в воздушной прослойке навесных вентилируемых фасадов [Текст] / Д.В. Немова // Инженерно-строительный журнал.— 2013. №2.— С. 25–34.

5. **Петриченко, М.Р.** Расщепляющие разложения в предельных задачах для обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.Р. Петриченко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.— 2012. №2 (146).— С. 143–149.

6. **Остроумов, Г.С.** Свободная конвекция в условиях внутренней задачи [Текст] / Г.С. Остроумов //

М.—Л.: ГТТИ, 1952.— 256 с.

7. **Соковишин, Ю.А.** Введение в теорию свободноконвективного теплообмена [Текст] / Ю.А. Соковишин, О.Г. Мартыненко.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.— 232 с.

8. **Колешко, С.Б.** Турбулентный свободноконвективный теплообмен на вертикальной поверхности со ступенчатым нагревом при инверсии теплового потока [Текст] / С.Б. Колешко, Ю.С. Чумаков // Теплофизика высоких температур.— 2010. Т. 48, № 3.— С. 419–423.

9. **Чумаков, Ю.С.** Экспериментальное исследование переходного и турбулентного свободноконвективного пограничного слоя на вертикальной нагретой поверхности [Текст]: Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук / Ю.С. Чумаков.— Санкт-Петербург, 2000.

10. **Greene, G.A.** Heat Transfer [Текст] // Encyclopedia of Physical Science and Technology.— Third Edition.— 2003.— P. 279–292.

## REFERENCES

1. **Petrosova D.V.** Neizotermicheskaia fil'tratsiia vozdukhа cherez ograzhdaiushchie konstruksii zamknutykh pomeshchenii [Текст]: avtoref. diss. k.t.n. / D.V. Petrosova.— 05.23.16.— SPbGPU, 2012.— 21 s. (rus.)

2. **Petrichenko M.R.** Termodinamicheskie tozhdestva i uravneniia neizotermicheskoi fil'tratsii v izotropnoi poristoi srede [Текст] / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU.— 2013. № 2(171).— С. 188–192. (rus.)

3. **Petrichenko M.R., Petrochenko M.V.** Dostatochnye usloviia sushchestvovaniia svobodnokonvektivnogo techeniia v vertikal'nom shchelevom kanale [Текст] // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU.— 2012. № 2-2(147).— С. 276–282. (rus.)

4. **Nemova D.V.** Integral'nye kharakteristiki termogravitatsionnoi konveksii v vozdukhnoi prosloike navesnykh ventiliruemykh fasadov [Текст] // Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal.— 2013. №2. С. 25–34. (rus.)

5. **Petrichenko M.R.** Rasshepliiaushchie razlozheniia v predel'nykh zadachakh dlia obyknovennykh kvazilineinykh differentsial'nykh uravnenii [Текст] // Nauchno-

tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki.— 2012. №2 (146).— С. 143–149. (rus.)

6. **Ostroumov G.S.** Svobodnaia konveksiia v usloviiax vnutrennei zadachi [Текст] // М.—Л.: ГТТИ, 1952.— 256 с. (rus.)

7. **Sokovishin Yu.A., Martynenko O.G.** Vvedenie v teoriiu svobodno-konvektivnogo teploobmena [Текст] // Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.— 232 с. (rus.)

8. **Koleshko S.B., Chumakov Yu.S.** Turbulentnyi svobodnokonvektivnyi teploobmen na vertikal'noi poverkhnosti so stupenchatym nagrevom pri inversii teplovogo potoka [Текст] // Teplofizika vysokikh temperatur.— 2010. Т. 48, № 3.— С. 419–423. (rus.)

9. **Chumakov Yu.S.** Eksperimental'noe issledovanie perekhodnogo i turbulentnogo svobodnokonvektivnogo pogranichnogo sloia na vertikal'noi nagretoi poverkhnosti [Текст]: Avtoref. diss. ... doktora fiziko-matematicheskikh nauk.— Sankt-Peterburg, 2000. (rus.)

10. **Greene George Alanson.** Heat Transfer // Encyclopedia of Physical Science and Technology.— Third Edition.— 2003.— P. 279–292. (rus.)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**НЕМОВА Дарья Викторовна** — инженер кафедры строительства уникальных зданий и сооружений Инженерно-строительного института Санкт-Петербургского государственного политехнического университета; 195251, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: darya.nemova@gmail.com

**ОЛЬШЕВСКИЙ Вячеслав Янушевич** — магистр инженерно-строительного института Санкт-Петербургского государственного политехнического университета; e-mail: Volshevskiy@yandex.ru

**ЦЕЙТИН Дмитрий Николаевич** — ведущий инженер кафедры гидравлики инженерно-строительного института Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 195251, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: dm.inco@gmail.com

### **AUTHORS**

**NEMOVA Darya V.** — St. Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia; e-mail: darya.nemova@gmail.com

**OLSHEVSKIY Vyacheslav Ya.** — St. Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia; e-mail: Volshevskiy@yandex.ru

**TSEYTIN Dmitrii N.** — St. Petersburg State Polytechnical University; 195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia; e-mail: dm.inco@gmail.com