

DOI: 10.18721/JEST.26204
УДК 62-97

К.В. Осинцев, С.В. Алюков

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ НОВОГО МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ

Показано, что в настоящее время используются стандартные методы аппроксимации при использовании метода конечных объемов в задачах разрывных газодинамических течений. Кроме того, актуальность темы связана с разработкой методологии теоретических и практических исследований газодинамики и теплообмена при течении газа в трубе на основе математической модели с использованием новых методов аппроксимации разрывных функций. Приводится описание схемы С.К. Годунова, основанной на аппроксимации потоков на границах ячеек разностной сетки с помощью точного решения задачи Римана о распаде газодинамического разрыва. Авторы указывают на серьезную погрешность в расчетах при аппроксимации с использованием рядов Фурье, появление эффекта Гиббса. Впервые представлена схема аппроксимации профессора С.В. Алюкова в применении к разрывному газодинамическому течению. Анализ точных решений и расчетных данных авторов показал расхождение между ними 4–5%. Подтверждена возможность использования нового методологического подхода к решению задач газодинамики разрывных потоков при их математическом моделировании и использовании разностных схем.

Ключевые слова: разрывные газодинамические течения, ударные волны, контактные разрывы, новые методы аппроксимации, численная проверка.

Ссылка при цитировании:

Осинцев К.В., Алюков С.В. Математическое моделирование разрывных газодинамических течений с применением нового метода аппроксимации // Материаловедение. Энергетика. 2020. Т. 26, № 2. С. 41–55. DOI: 10.18721/JEST.26204

Это статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

K.V. Osintsev, S.V. Aliukov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

MATHEMATICAL MODELING OF DISCONTINUOUS GAS-DYNAMIC FLOWS USING A NEW APPROXIMATION METHOD

The paper shows researchers currently apply standard approximation methods when using the finite volume method in problems of discontinuous gas-dynamic flows. In addition, the topic is relevant due to development of a methodology for theoretical and practical studies of gas dynamics and heat transfer during gas flow in a pipe based on a mathematical model using new methods for approximating discontinuous functions. The paper describes S.K. Godunov's circuit, based on the approximation of flows at the cells boundaries of the difference grid using the exact solution of the Riemann problem of the gas-dynamic discontinuity decay. The authors point out a serious error in the calculations during approximation using Fourier series, as the Gibbs effect occurs. The paper presents Professor S.V. Alyukov's approximation

scheme applied to a discontinuous gas-dynamic flow for the first time. The authors' analysis of the exact solutions and calculated data showed a difference of 4–5% between them. The results confirm the possibility of using a new methodological approach to solving the problems of gas dynamics of discontinuous flows in their mathematical modeling and use of difference schemes.

Keywords: discontinuous gas-dynamic flows, shock waves, contact discontinuities, new approximation methods, numerical verification.

Citation:

K.V. Osintsev, S.V. Aliukov, Mathematical modeling of discontinuous gas-dynamic flows using a new approximation method, *Materials Science. Power Engineering*, 26 (02) (2020) 41–55, DOI: 10.18721/JEST.26204

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение. Создание математического аппарата для описания процессов распространения пламени в замкнутом пространстве начались в первой половине XX века. Самые первые модели по теории экзотермического скачка основаны на условии Чепмена-Жуге [1] возникновения детонационных волн и описываются алгебраическими соотношениями. Модель Зельдовича-Неймана-Дёринга [2] в теории применима для системы координат экзотермического скачка, использует одномерную стационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом реакций и начальных условий. При интегрировании этой системы уравнений можно обнаружить связь с параметрами Чепмена-Жуге за экзотермическим скачком. Явление детонации в газе невозможно описать без учета поперечных волн [3], создающих ячеистую структуру [4] фронта пламени при детонации. Учесть протекающие химические реакции в газе при детонации можно по упрощенным моделям, например Коробейникова-Левина [5], или более сложным с детальным [6] и глобальным [7] кинетическим механизмом горения. Все современные компьютерные программы основаны на математических трехмерных моделях [8] процесса горения и детонации газа с учетом волн детонации. Современные исследования в областях, связанных с ударными волнами [9, 10] и использованием производных при математическом описании процесса [11, 12] связаны с визуализацией течений газов и повышением точности вычислений. Следует отметить работы L. Laguarda и Y. Tao с соавторами о несимметричной задаче течения [13, 14]. Также интересны исследования о пограничном слое при течении газа [15] и влиянии угла отражения ударной волны [16]. A. Sharma и R. García-Mayoral проводят математическое моделирование турбулентных течений [17, 18]. Аналогичные работы проводятся другими исследователями [19, 20], в том числе при обтекании тел сложной формы в каналах [21]. 3. Обычно аппроксимации проводятся не только обобщенными функциями, которые можно, но и другими типа функций, что значительно затрудняет процесс аппроксимации, снижает точность расчетов. Не все основные функции параметров течения для k - ω компьютерного моделирования могут быть аппроксимированы существующими методиками. Полученные приближения описывают исходную функцию. В работах [17, 18] выдвигаются предложения по улучшению математического аппарата стандартной модели k - ω , однако существенно это не улучшает качественные и количественные характеристики процесса математического описания газодинамических течений.

Однако, даже в современных программах существует ряд нерешенных проблем. При рассмотрении дифференциальной краевой задачи используют разностную схему с определенным заранее порядком точности или определенный порядок аппроксимации. Наиболее распространенным в области газовой динамики является метод конечных объемов.

Разрывные течения, ударные волны и скачки уплотнений встречаются при дозвуковом и сверхзвуковом течении газа. В этом случае вводится понятие контактных поверхностей разрыва между двумя газами, которые остаются по обе стороны поверхности и не перемешиваются. Ос-

цилляции появляются при рассмотрении разрывных течений газов в совокупности с использованием центрально-разностных методов, рис. 1.

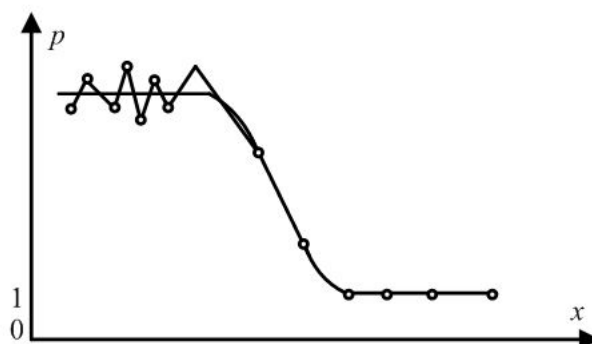


Рис.1. Пример осцилляции давления
Fig. 1. Example of pressure oscillation

Такое явление в математике принято называть явление Гиббса [22], которое появляется только при разложении в ряд Фурье, особенно это наглядно для разрывных функций, описывающих газодинамические процессы. Разложение функции в ряды является неустойчивым, поэтому необходимо снижать осцилляции в подобных задачах, например в задаче Сода. Подобные задачи – модельные, а для повышения устойчивости при математическом моделировании используется вместо обычной искусственная вязкость.

Актуальность работы. В случае центрально-разностных схем с искусственной вязкостью применяется высокий порядок аппроксимации, что не всегда способствует качеству математического описания и затрачивает много времени на проведение расчетов и построение графиков. Для повышения точности расчетов и снижения осцилляций необходимо использовать новые методы аппроксимации. В данной работе предлагается новый методологический подход к решению задач газодинамики разрывных потоков при их математическом моделировании и использовании разностных схем.

Цель работы – внедрение новых методов аппроксимации при математическом моделировании разрывных газодинамических течений, а также оценка погрешности аппроксимации методом С.В. Алюкова.

Методы и материалы

Дифференциальные уравнения газовой динамики с учетом химических реакций интегрируются по каждому объему. В основу метода конечных объемов положено уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f) = g(u), \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad (2)$$

причем в формулах (1) и (2) $f = (f_1, f_2)$ – вектор-функция.

Далее уравнение (1) интегрируется по произвольному объему V :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(f(u)) dV = \int_V g(u) dV. \quad (3)$$

По теореме Остроградского-Гаусса интеграл по объему $\text{div}(f)$ равен интегралу по поверхности объема:

$$\int_V \text{div}(f(u))dV = \oint_{\partial V} (f \cdot n) dS, \quad (4)$$

где ∂V – поверхность объема V , n – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂V , а выражение $\oint_{\partial V} (f \cdot n) dS$ – поток векторного поля f через поверхность ∂V .

В результате получим интегральный закон сохранения:

$$\int_V \text{div}(f(u))dV + \oint_{\partial V} (f \cdot n) dS = \int_V g(u)dV. \quad (5)$$

Таким образом, скорость изменения величины u в объеме V равна сумме потока этой величины через границу объема V и мощности источника внутри объема V .

Однако возникает проблема отыскания потока через грань, в первую очередь, связанная с использованием систем уравнений с разрывом первого рода.

Стандартные схемы аппроксимации потоков через грань при использовании метода конечных объемов. Предположим, что решение уравнения (5) известно – это функция непрерывного аргумента u . Для каждой i -той ячейки определяется средняя по объему величину u :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} u dV. \quad (6)$$

После ряда преобразований можно получить разностную схему метода конечных объемов:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{V_i} \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \cdot n_{\alpha} \cdot S_{\alpha} = g(\bar{u}_i), \quad (7)$$

где S_{α} – площадь грани α , n_{α} – единичная внешняя нормаль к грани α , f_{α} – значение вектора f в центре грани α . В этом случае остается только конкретизировать способ вычисления f_{α} через значения искомой переменной \bar{u}_i в центрах ячеек, а также способ аппроксимации производной по времени.

Рассмотрим способы аппроксимации f_{α} на примере сетки, рис. 2.

Предположим, что $g(\bar{u}_i) = 0$, тогда при аппроксимации производной по времени τ разностью вперед получим:

$$\frac{\bar{u}_{ij}^{n+1} - \bar{u}_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{V_{ij}} \left[(f \cdot S)_{i+1/2} - (f \cdot S)_{i-1/2} - (f \cdot S)_{j+1/2} - (f \cdot S)_{j-1/2} \right]. \quad (8)$$

Способы вычисления численных потоков $(f \cdot S)_{i\pm 1/2}$ и $(f \cdot S)_{j\pm 1/2}$ различны.

Например, можно использовать центрально-разностную схему, о недостатках которой в случае разрывных газодинамических течений было сказано ранее, тогда получим:

$$\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial t} + a_1 \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h_1} + a_2 \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{2h_2} = 0, \quad (9)$$

где a_1 и a_2 – постоянные коэффициенты.

Или можно использовать противопотоковую схему 1 порядка аппроксимации:

$$f_{i+1/2} = \begin{cases} f_i, & \text{если } a_{i+1/2} \geq 0 \\ f_{i+1}, & \text{если } a_{i+1/2} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

где

$$a_{i+1/2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(u_{i+1/2}), \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_{i+1/2}) \right) \cdot n_{i+1/2}. \quad (11)$$

В случае применения противопотоковой схемы для системы уравнений разрывного газодинамического течения необходимо перейти к инвариантам Римана и обратно.

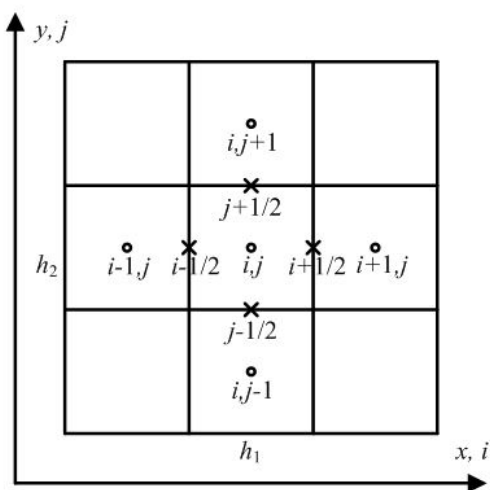


Рис. 2. Разностная сетка с шагами h_1 и h_2

Fig. 2. Difference grid with steps h_1 and h_2

Сравнение с наиболее близкими аналогами.

Наиболее близкой по точности расчетов является схема С.К. Годунова [25]. Рассмотренная схема является противопотоковой и относится к стандартным схемам. Начальные условия на границе разрыва задаются кусочно-линейными функциями.

Кусочно-линейные функции. Методы аппроксимации с использованием рядов Фурье, появление эффекта Гиббса.

Кусочно-линейные функции представляют собой отрезки на каждом участке, соответственно решение может быть получено при использовании теории линейных систем.

Наверное, самым известным способом аппроксимации является разложение в ряд Фурье.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k, \quad (12)$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ представлена как ортогональная система в функциональном гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ измеримых функций с интегрируемыми по Лебегу квадратами, $f \in L_2[-\pi, \pi], c_k = (f_k \cdot \varphi_k) / \|\varphi_k\|^2$. Используется тригонометрическая система 2π -периодических функций $\{1, \sin nx, \cos nx, n \in N\}$ в качестве ортогональной.

Покажем, что использование рядов Фурье для аппроксимации кусочно-линейных функций приводит к появлению достаточно высокой погрешности вычислений при аппроксимации. Кроме того, выделим специфические скачкообразные волны аппроксимирующей функции в окрестности точек разрыва $O_\delta = (x_0)$. Для таких точек

$$\sup_{x \in O_\delta / \{x_0\}} |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \neq 0, \quad (13)$$

где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье [22]. Например, для функции

$$f_0(x) = \text{sign}(\sin x) \quad (14)$$

с прямоугольными импульсами точка $x = \pi/m$, где $m = 2[(n+1)/2]$ и $[A]$ – целая часть числа A , является точкой максимума частичной суммы $S_n(f_0)$ ряда Фурье [24],

$$S_n(f_0, \pi/m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,17898, \quad (15)$$

абсолютная погрешность равна

$$\left| f_0(\pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f_0, \pi/m) \right| > 0,178, \quad (16)$$

а относительная погрешность составит более 17% [25].

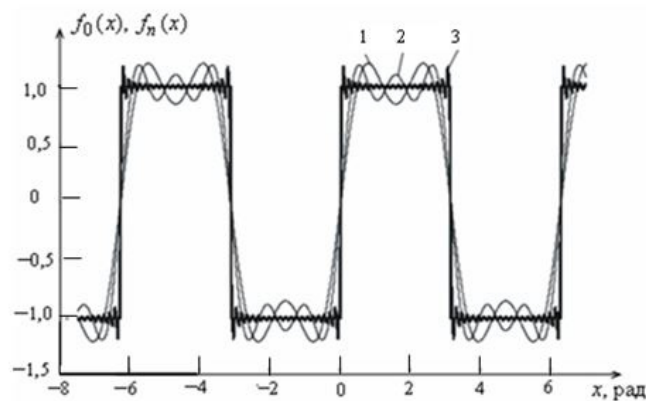


Рис. 3. Погрешности аппроксимации с помощью разложения в ряд Фурье
Fig. 3. Approximation errors using Fourier series expansion

На рис. 3 кривая 3 соответствует графику аппроксимирующей функции

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{20} c_n \cdot \varphi_n, \quad (17)$$

показывает высокую погрешность аппроксимации, здесь отчетливо виден эффект Гиббса [25].

Для функций имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, с изолированной точкой разрыва $x_0 \in (a, b)$ выполняется условие [25]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0 + \pi/m) = f(x_0, 0) + \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right), \quad (18)$$

где $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Покажем, что $\Delta = \Delta(x)$, $\delta = \delta(x)$ – абсолютная и относительная погрешности аппроксимации соответственно не имеют предела увеличения.

И на самом деле получим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(x_0 + \pi/m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(f, x_0 + \pi/m) - f(x_0 + \pi/m)| = \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 + \pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \pi/m) \right| = \\ &= \left| f(x_0 + 0) + \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) - f(x_0 + 0) \right| = \\ &= \left| \frac{d}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) \right| = \Delta(d), \end{aligned} \quad (19)$$

Причем функция $\Delta(d)$ – бесконечно большая величина, поскольку

$$\begin{aligned} \forall M > 0 \exists d = d^*(M) > 0 \forall d : |d| > d^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta(d^*) = \left| \frac{d^*}{2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) \right| > M, \end{aligned} \quad (20)$$

Можно взять d^* , например,

$$\left[2M\pi / \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \pi \right) \right] + 1. \quad (21)$$

Доказательство такое же и для относительной погрешности $\delta(x) = \Delta(x) / |f(x)|$. При постоянном значении $d > R$ ($d \neq 0$) и для любого $M > 0$ подбирается функция $f(x) \in L_2[a, b]$, для которой $\delta(x_0 + 0, d) = \Delta(x_0 + 0, d) / |f(x_0 + 0)| > M$. В качестве подобной функции возьмем функцию, у которой $|f(x_0 + 0)| < \Delta(x_0 + 0, d) / M, f(x_0 + 0) \neq 0$.

Результаты

Новая схема аппроксимации профессора С.В. Алюкова.

Ступенчатая функция может быть аппроксимирована рекурсивными функциями [25]

$$\{f_n(x) \mid f_n(x) = \sin((\pi/2)f_{n-1}(x)), f_1(x) = \sin(x); n - 1 \in N\} \subset C^\infty[-\pi, \pi]. \quad (22)$$

Форма записи (22) базируется на использовании тригонометрических выражений в форме вложений.

Получим, что в этом случае график функции примет вид согласно рис. 4. Также на этом рисунке показаны графики четырех последовательных приближений.

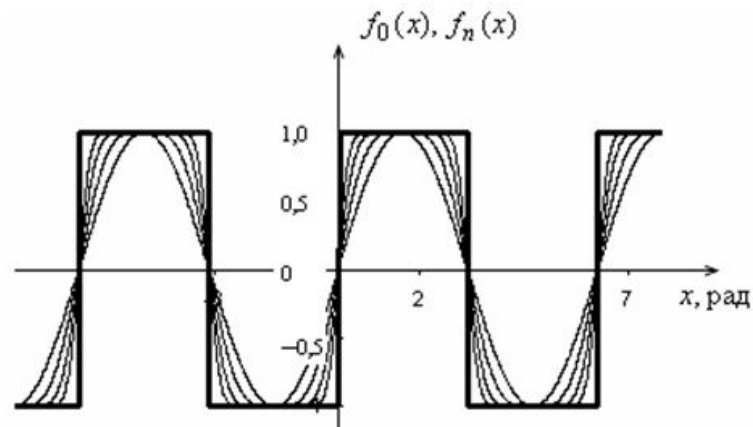


Рис. 4. Графики ступенчатой функции и четырех ее последовательных приближений с помощью вложенных функций

Fig. 4. Graphs of a step function and its four consecutive approximations using nested functions

Необходимо учитывать, что при рассмотрении данного алгоритма (22) действий даже при небольших значениях n графики исходной и аппроксимирующей функций очень близко сходятся. Кроме того, колебаний на прямолинейных участках практически нет, что соответственно приводит к снижению влияния эффекта Гиббса на процесс аппроксимации исходной функции.

Сходимость и погрешность аппроксимации.

Далее рассмотрим актуальные для методов аппроксимации и математического моделирования моменты относительно сходимости функций и погрешности. С точки зрения внедрения нового метода на практике, необходимо повысить точность, устойчивость и скорость решения при аппроксимации кусочно-линейных функций.

Ранее авторами в [25] доказано, что последовательность аппроксимирующих функций сходится по норме к исходной функции, причем это утверждение справедливо для пространств $L_1[0, \pi/2]$ и $L_2[0, \pi/2]$.

Приведем последовательность доказательства этого утверждения в сокращенном виде, полное описание можно найти в работе [25].

При использовании последовательности минорантных относительно последовательности $f_n(x)$ функций, получим

$$\{\varphi_n(x) \mid \varphi_n(x) = 1 - \exp(-(\pi/2)^{n-1} \cdot x), n \in N\} \subset C^\infty [0, \pi/2]. \quad (23)$$

Доказывается, что $f_n(x) \geq \varphi_n(x), \forall n \in N, \forall x \in [0, \pi/2]$. Мера множества точек разрыва функции $f_0(x)$ равна нулю. Тогда, учитывая знаконеотрицательность и ограниченность функций $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ на рассматриваемом отрезке, в пространстве $L_1[0, \pi/2]$ получим

$$\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} = \int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x)) dx \leq \int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x)) dx =$$

$$= (2/\pi)^{n-1} \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right). \quad (24)$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2/\pi)^{n-1} \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right), \quad (25)$$

то

$$\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (26)$$

В функциональном гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi/2]$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^{\pi/2} (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}. \quad (27)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} &= \left(\int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x))^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} \left(1 - \exp\left(-2(\pi/2)^n\right)\right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} \left(1 - \exp\left(-2(\pi/2)^n\right)\right) \right)^{1/2} = 0. \quad (29)$$

получим, что и в этом пространстве

$$\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (30)$$

Последовательность (22) сходится в среднем к исходной функции.

Таким образом, последовательность $f_n(x)$ (22) в пространствах $L_1[-\pi, \pi]$ и $L_2[-\pi, \pi]$ – фундаментальная, а в пространстве $C[-\pi, \pi]$ последовательность $f_n(x)$ не фундаментальна.

Численная проверка погрешности вычислений по новой схеме аппроксимации.

Для оценки погрешности аппроксимации воспользуемся соотношением $\varphi_n(x) \leq f_n(x) \leq \Psi_n(x)$ (рис. 6), где $\Psi_n(x) = (\pi/2)^{n-1} \cdot x$, $x \in [0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$. Функции $\varphi_n(x)$ и $\Psi_n(x)$ построены из условия равенства производных в нуле $\varphi'_n(0) = \Psi'_n(0) = f'_n(0)$, что позволяет получить узкий интервал для оценки погрешности аппроксимации.

В пространстве $L_1[0, \pi/2]$ оценки для абсолютной и относительной погрешности соответственно равны

$$\frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} \leq \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \leq (2/\pi)^{n-1} \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right), \quad (31)$$

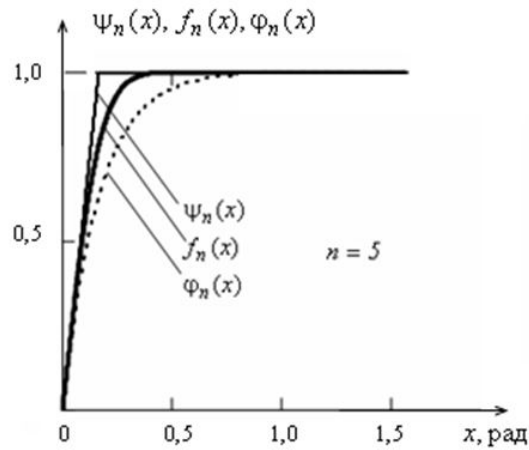


Рис. 5. Графики ограничивающих функций
Fig. 5. Charts of boundary function

$$\frac{(2/\pi)^n}{2} \leq \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \leq (2/\pi)^n \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right), \quad (32)$$

Для пространства $L_2[0, \pi/2]$ эти оценки принимают соответственно вид

$$\left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{3}\right)^{1/2} \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \leq \left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right)\right)^{1/2}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{(2/\pi)^{n-1}}{3}\right)^{1/2} \leq \left(\|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]}\right) / (\pi/2)^{1/2} \leq \left(\frac{(2/\pi)^n}{2} \left(1 - \exp\left(-(\pi/2)^n\right)\right)\right)^{1/2}. \quad (34)$$

Графики верхних и нижних оценок относительной погрешности δ в зависимости от $n \in N$ для пространства $L_1[0, \pi/2]$ (кривые 1) и пространства $L_2[0, \pi/2]$ (кривые 2) изображены на рис. 6.

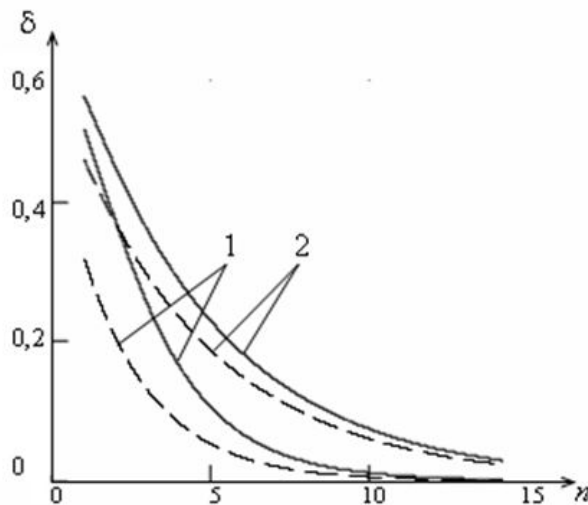


Рис. 6. Графики оценок относительной погрешности
Fig. 6. Graphs of estimates of relative error

Таким образом, для устойчивости разностной схемы, аппроксимирующей уравнение газодинамики необходимо, чтобы норма погрешности на $(n+1)$ шаге по времени не превосходила погрешности на (n) шаге. Данное утверждение для нового метода аппроксимации доказано вычислениями (23)-(30). Кроме того, согласно предлагаемому методу аппроксимации, как показано на рис. 6, при итерации $(n)=5$ относительная погрешность главного члена при решении уравнений газодинамики $\delta \approx 0,05$ и при увеличении числа итераций (n) продолжает снижаться. Например, при введении искусственной вязкости и использовании метода контрольных объемов и противопоточной схемы $\delta \approx 0,048$ при итерации $(n)=5$.

Обсуждение

Решение актуальных задач в области динамики газов основано, в первую очередь, на использовании математического описания процессов, протекающих в движущихся средах. Разработка новых методов аппроксимации позволяет уменьшить погрешность, сократить время расчета. Кроме того, при реализации на практике результатов математического моделирования повышается эффективность устройств, за счет более точно спрогнозированных параметров течения газов.

Следует отметить, что движущаяся среда — газ или смесь газов, а также смесь газов и твердых частиц, последнее касается случая горения топливно-воздушной смеси, например, частиц твердого топлива и воздуха или другого окислителя.

На практике, импульсное изменение величины практически не встречается, однако разработанный математический аппарат может применяться не только для подобного вида газодинамических течений, но и для аппроксимации кусочно-линейных функций, описывающих схожие процессы в технике.

Научная новизна методов исследования. Разработан новый методологический подход к решению задач газодинамики разрывных потоков при их математическом моделировании и использовании разностных схем, применяемые авторами методы аппроксимации кусочно-линейных функций рекурсивными функциями позволяют снизить погрешность вычислений и избежать появления эффекта Гиббса.

Практическая значимость исследований. При проектировании новых технологических устройств, в которых наблюдаются разрывные газодинамические течения, необходимо проводить предварительное математическое моделирование протекающих динамических процессов. В связи с этим разработка новых методов аппроксимации существенно сократит время расчетов и снизить погрешность вычислений, что позволит более достоверно проводить математическое моделирование газодинамических течений.

Новый методологический подход к решению задач газодинамики разрывных потоков при их математическом моделировании и использовании разностных схем позволяет без разложения в ряды Фурье, а только при использовании стандартных тригонометрических функций повысить сходимость исходной и аппроксимирующей функций, а также снизить погрешность расчетов.

Кроме того, применяемые новые методы аппроксимации полностью отвечают реализуемым на практике динамическим и скачкообразным процессам, что наиболее полно решает существующие научные проблемы в технике высоких температур, течений газов и распространения волновых возмущений в пространстве.

Разрывные газодинамические функции, в том числе кусочно-линейные, не соответствуют условиям теорем Вейерштрасса, поэтому при аппроксимации таких функций возникают проблемы, вызывающие отрицательные последствия при решении задач. Для устранения недостатков предлагается использовать новые методы аппроксимации кусочно-линейных функций, основанные так же, как и ряды Фурье, на применении тригонометрических выражений, но в виде рекурсивных функций. Математическая основа новых методов такая же, как и у рядов Фурье, однако имеет особенность — исходная ступенчатая функция аппроксимируется последовательностью

рекурсивных периодических функций, причем функции должны быть нечетными и периодическими с периодом 2π .

Авторы подчеркивают, что полученные результаты математического описания могут быть применены для газодинамических течений, например в компьютерной среде ANSYS CFD, что приведет к повышению устойчивости и сходимости расчетов. Как было сказано ранее погрешность предлагаемой методики расчета с применением аппроксимирующих функций вместо рядов Фурье, делает теоретический расчет более корреляционным по отношению к полученным в ходе результатам по другим известным методикам. Кроме того, погрешность при математическом моделировании снижается по причине использования специфических сеток и моделей, применяемых только при течении однородных газов и смесей или гетерогенной смеси.

Кроме того, представим рекомендации по дальнейшему использованию и расширению диапазона применения полученных результатов при компьютерном моделировании процессов горения в факеле и распространению фронта пламени в высокотемпературных установках. Основные функции параметров для k - ω компьютерного математического моделирования, например в ANSYS CFD топливно-воздушного потока могут быть аппроксимированы с использованием разработок авторов.

Выводы

Полученные по итогам исследования результаты полностью соответствуют поставленной цели, отражают новые научные методы и практическую значимость работы.

1. На основе новых методов аппроксимации кусочно-линейных функций рекурсивными функциями разработан методологический подход к решению задач газодинамики разрывных потоков при их математическом моделировании и использовании разностных схем.

2. При предварительном математическом моделировании протекающих в динамических процессах в технологических устройствах новые методы аппроксимации сокращают время расчетов и снижают погрешность вычислений.

3. Аппроксимация проводится обобщенными функциями, которые можно дифференцировать и находить их производные любого порядка. Таким образом, основные функции параметров для k - ω компьютерного моделирования топливно-воздушного потока могут быть аппроксимированы новым методом.

4. Полученные приближения более точно описывают исходную функцию. Предложения по улучшению математического аппарата стандартной модели k - ω помогут исследователям развить теорию приближения рекурсивными функциями доктора С.В. Алюкова. Полученные результаты позволят решить одну из важных задач моделирования на данном этапе его разработки, а именно: сократить время расчета и адекватность построенной модели для аналогичных установок и устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Williams F.A.** Combustion theory, second ed., Benjamin/Cummings Menlo Park CA, Westview Press, 1985. 704 p.

[2] **Гендугов В.М.** Обобщенная модель стационарной газовой детонации Зельдовича–Неймана–Деринга // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 5. С. 40–46 .

[3] **Селиванов В.В., Соловьев В.С., Сысоев Н.Н.** Ударные и детонационные волны. Методы исследования. М.: Изд-во МГУ, 1990. 256 с.

[4] **Митрофанов В.В.** Детонация однородных и гетерогенных систем. Новосибирск: Издательство Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2003. 200 с.

- [5] **Коробейников В.П., Левин В.А.** Сильный взрыв в горючей смеси газов // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1969. № 6. С. 48–51.
- [6] **Медведев С.Н., Сметанюк В.А., Фролов С.М., Шамшин И.О.** Методы ускорения многомерных газодинамических расчетов с детальными кинетическими механизмами окисления и горения моторных топлив // Горение и взрыв. 2013. Том 6. № 6. С. 45–50.
- [7] **Басевич В.Я., Беляев А.А., Медведев С.Н., Посвянский В.С., Фролов С.М.** Кинетические детальный и глобальный механизмы для суррогатного топлива // Горение и взрыв. 2015. Том 8. № 1. С. 21–28.
- [8] **Батурич О.В., Батурич Н.В., Матвеев В.Н.** Расчет течений жидкостей и газов с помощью универсального программного комплекса Fluent. Самара: Изд-во Самар. гос. Аэро-косм. ун-та, 2009. 151 с.
- [9] **Shi C., Han W., Deiterding R., Zhu C.** You Second-order curved shock theory, *Journal of Fluid Mechanics*, 891 (2020) A21.
- [10] **Surujhhal D., Skews B.W.** Two-dimensional supersonic flow over concave surfaces, *Shock Waves*, 28 (2018) 1199–1205.
- [11] **Emanuel G.** Derivatives on the downstream side of a moving, curved shock, *Journal of Engineering Mathematics*, 117 (2019) 79–105.
- [12] **Chernyshov M.V., Gvozdeva L.G.** Differential characteristics of the overexpanded gas jet flow field in the vicinity of the nozzle edge, *Technical Physics*, 64(4) (2019) 441–448.
- [13] **Laguarda L., Hickel S., Schrijer F., Van B.** Oudheusden Dynamics of unsteady asymmetric shock interactions, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A18.
- [14] **Tao Y., Liu W., Fan X., Xiong B., Yu J., Sun M.** A study of the asymmetric shock reflection configurations in steady flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 825 (2017) 1–15.
- [15] **Grossman I., Bruce P.** Confinement effects on regular–irregular transition in shock-wave–boundary-layer interactions, *Journal of Fluid Mechanics*, 853 (2018) 171–204.
- [16] **Wang H., Zhai Z., Luo X., Yang J., Lu X.** A specially curved wedge for eliminating wedge angle effect in unsteady shock reflection, *Physics of Fluids*, 29(8) (2017) 086103.
- [17] **Sharma A., García-Mayoral R.** Scaling and dynamics of turbulence over sparse canopies, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A1.
- [18] **Sharma A., García-Mayoral R.** Turbulent flows over dense filament canopies, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A2.
- [19] **Müller J., Lückhoff F., Paredes P., Theofilis V., Oberleithner K.** Receptivity of the turbulent precessing vortex core: Synchronization experiments and global adjoint linear stability analysis, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A3.
- [20] **Liu Y., Dong M., Wu X.** Generation of first Mack modes in supersonic boundary layers by slow acoustic waves interacting with streamwise isolated wall roughness, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A10.
- [21] **Fomin V.M., Nalivaychenko D.G.** Gas dynamics of the body flight in the channel, *Journal of Physics*, 1404 (2019) 012078.
- [22] **Helmbert G.** The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation // *J. Approx. Theory*, 78 (1994) 41–63.
- [23] Сафронов А.В., Фомин Ю.В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношений на разрывах // Труды МФТИ. Прикладная механика, динамика жидкости и газа. 2010. Том 2. № 2. С. 137–148.
- [24] **Жук В.В., Натансон Г.И.** Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 188 с.
- [25] **Алюков С.В.** Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 75–88.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ОСИНЦЕВ Константин Владимирович – *Заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики, Южно-Уральский государственный университет, канд. техн. наук.*
E-mail: osintsev2008@yandex.ru

АЛЮКОВ Сергей Викторович – *профессор кафедры автомобильного транспорта, Южно-Уральский государственный университет, д-р техн. наук.*
E-mail: alysergey@gmail.com

Дата поступления статьи в редакцию: 27.04.2020

REFERENCES

- [1] **F.A. Williams**, Combustion theory. Second Edition. – Benjamin / Cummings, Menlo Park, CA: Westview Press, 1985.
- [2] **V.M. Gendugov**, A generalized model of stationary gas detonation Zeldovich – Neumann – Dering, Bulletin of Moscow University. Series I. Mathematics. Mechanics, 5 (2010) 40–46.
- [3] **V.V. Selivanov, V.S. Soloviev, N.N. Sysoev**, Shock and detonation waves. Research Methods. M.: Publishing House of Moscow State University, 1990.
- [4] **V.V. Mitrofanov**, Detonation of homogeneous and heterogeneous systems / V.V. Mitrofanov. Novosibirsk: Publishing House of the Institute of Hydrodynamics, 2003.
- [5] **V.P. Korobeinikov, V.A. Levin**, Sil'nyĭ vzryv v goriucheĭ smesi gazov [Strong explosion in a combustible mixture of gases], Bulletin of the USSR Academy of Sciences. The mechanics of fluid and gas, 6 (1969) 48–51.
- [6] **S.N. Medvedev, V.A. Smetanyuk, S.M. Frolov, I.O. Shamshin**, Methods of accelerating multidimensional gas-dynamic calculations with detailed kinetic mechanisms of oxidation and combustion of motor fuels, Combustion and Explosion, 6(6) (2013) 45–50.
- [7] **V.Ya. Basevich, A.A. Belyaev, S.N. Medvedev, V.S. Posvyanskiy, C.M. Frolov**, Kinetic detailed and global mechanisms for surrogate fuel, Combustion and Explosion, 8(1) (2015) 21–28.
- [8] **O.V. Baturin, N.V. Baturin, V.N. Matveev**, Calculation of flows of liquids and gases using the universal software package Fluent. Samara: Samara University Publishing house, 2009.
- [9] **C. Shi, W. Han, R. Deiterding, C. Zhu, Y. You**, Second-order curved shock theory, Journal of Fluid Mechanics, 891 (2020) A21.
- [10] **D. Surujhlah, B.W. Skews**, Two-dimensional supersonic flow over concave surfaces, Shock Waves, 28 (2018) 1199–1205.
- [11] **G. Emanuel**, Derivatives on the downstream side of a moving, curved shock, Journal of Engineering Mathematics, 117 (2019) 79–105.
- [12] **M.V. Chernyshov, L.G. Gvozdeva**, Differential characteristics of the overexpanded gas jet flow field in the vicinity of the nozzle edge, Technical Physics, 64(4) (2019) 441–448.
- [13] **L. Laguarda, S. Hickel, F. Schrijer, B. Van**, Oudheusden Dynamics of unsteady asymmetric shock interactions, Journal of Fluid Mechanics, 888 (2020) A18.
- [14] **Y. Tao, W. Liu, X. Fan, B. Xiong, J. Yu, M. Sun**, A study of the asymmetric shock reflection configurations in steady flows, Journal of Fluid Mechanics, 825 (2017) 1–15.
- [15] **I. Grossman, P. Bruce**, Confinement effects on regular–irregular transition in shock-wave–boundary-layer interactions, Journal of Fluid Mechanics, 853 (2018) 171–204.
- [16] **H. Wang, Z. Zhai, X. Luo, J. Yang, X. Lu**, A specially curved wedge for eliminating wedge angle effect in unsteady shock reflection, Physics of Fluids, 29(8) (2017) 086103
- [17] **A. Sharma, R. García-Mayoral**, Scaling and dynamics of turbulence over sparse canopies, Journal of Fluid Mechanics, 888 (2020) A1.

- [18] **A. Sharma, R. García-Mayoral**, Turbulent flows over dense filament canopies, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A2.
- [19] **J. Müller, F. Lückhoff, P. Paredes, V. Theofilis, K. Oberleithner**, Receptivity of the turbulent precessing vortex core: Synchronization experiments and global adjoint linear stability analysis, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A3.
- [20] **Y. Liu, M. Dong, X. Wu**, Generation of first Mack modes in supersonic boundary layers by slow acoustic waves interacting with streamwise isolated wall roughness, *Journal of Fluid Mechanics*, 888 (2020) A10.
- [21] **V.M. Fomin, D.G. Nalivaychenko**, Gas dynamics of the body flight in the channel, *Journal of Physics*, 1404 (2019) 012078.
- [22] **G. Helmborg**, The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation // G. Helmborg, *Journal of Approximation Theory*, 78 (1994) 41–63.
- [23] **A.V. Safronov, Yu.V. Fomin**, The method of numerical solution of gas dynamics equations using relations at discontinuities, *Transactions of MIPT. Applied mechanics, fluid and gas dynamics*, 2(2) (2010) 137–148.
- [24] **V.V. Beetle, G.I. Nathanson**, *Trigonometricheskie riady Fur'e i elementy teorii approksimatsii* [Trigonometric Fourier series and elements of approximation theory]. – L.: Leningrad Publishing house. University, 1983.
- [25] **S.V. Alyukov**, Approximation of step functions in mathematical modeling problems, *Mathematical Modeling*, 23(3) (2011) 75–88.

THE AUTHORS

OSINTSEV Konstantin V. – *South Ural State University*.
E-mail: osintsev2008@yandex.ru

ALIUKOV Sergey V. – *South Ural State University*.
E-mail: alysergey@gmail.com

Received: 27.04.2020